

Ion CRĂCIUN

Gheorghe BARBU

ECUAȚII DIFERENȚIALE ȘI CU DERIVATE PARȚIALE

Volumul 2

Ecuatii cu derivate parțiale

Teorie, exemple și exerciții rezolvate.

Cuprins

0.1	Prefață	vi
1	Sisteme de ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi	1
1.1	Sisteme de ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi neliniare sub formă normală	1
1.1.1	Legătura cu ecuațiile diferențiale de ordinul n	1
1.1.2	Integrale prime. Soluție generală	6
1.2	Sisteme diferențiale sub formă simetrică	8
1.3	Sisteme de ecuații diferențiale liniare	11
1.3.1	Sisteme de ecuații diferențiale liniare și omogene	12
1.3.2	Matrice fundamentală a unui sistem omogen	14
1.3.3	Determinantul lui Wronski	15
1.3.4	Soluția generală a sistemului omogen de ecuații diferențiale liniare	17
1.4	Sisteme neomogene de ecuații diferențiale liniare de ordinul întâi	18
1.5	Sisteme de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți	19
2	Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi	25
2.1	Ecuații liniare cu derivate parțiale de ordinul întâi	25
2.1.1	Definiții. Suprafețe integrale	25
2.1.2	Sistem caracteristic. Curbe caracteristice	26
2.1.3	Soluția generală	27
2.1.4	Problema lui Cauchy	31
2.2	Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi, cuasiliniare	33
2.2.1	Soluția generală	34
2.2.2	Problema lui Cauchy	37
3	Elemente de teoria câmpurilor	41
3.1	Câmpuri scalare. Curbe și suprafețe de nivel	41
3.2	Derivata după o direcție și gradientul unui câmp scalar	42
3.3	Câmpuri vectoriale. Linii și suprafețe de câmp	47
3.4	Integrale cu vectori și câmpuri scalare	54
3.4.1	Integrale curbilinii	55
3.4.2	Integrale de suprafață	56
3.4.3	Integrale triple (de volum)	58
3.4.4	Formula integrală Gauss–Ostrogradski. Consecințe	59
3.4.5	Câmp potențial	60
3.5	Divergența unui câmp vectorial	61
3.6	Rotorul unui câmp vectorial	63
3.7	Reguli de calcul cu operatorul lui Hamilton	65
3.8	Formule integrale	66
4	Ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea	71
4.1	Ecuațiile fizicii matematice	71
4.2	Tipuri de ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea	73
4.3	Reducerea la forma canonică a ecuațiilor de tip hiperbolic	77
4.4	Reducerea la forma canonică a ecuațiilor de tip parabolic	79

4.5	Reducerea la forma canonică a ecuațiilor de tip eliptic	82
5	Ecuatii cu derivate parțiale de tip hiperbolic	85
5.1	Ecuatia coardei vibrante	85
5.2	Metoda lui d'Alembert de integrare a ecuației omogene a coardei vibrante infinite	86
5.3	Metodă alternativă de deducere a formulei lui d'Alembert	88
5.4	Unicitatea soluției problemei Cauchy pentru coarda vibrantă infinită	90
5.5	Metoda separării variabilelor de integrare a ecuației omogene a coardei vibrante finite	90
5.6	Integrarea ecuației neomogene a coardei vibrante finite cu condiții la limită omogene	94
5.7	Integrarea ecuației neomogene a coardei vibrante finite cu condiții la limită neomogene	96
5.8	Principiul lui Duhamel pentru determinarea unei soluții particulare a ecuației neomogene a coardei vibrante finite	99
5.9	Ecuatia de echilibru a unei membrane elastice	100
5.10	Ecuatia de mișcare a unei membrane elastice	102
5.11	Oscilațiile libere ale unei membrane elastice circulare	102
6	Probleme de tip difuzie (Ecuatii de tip parabolic)	107
6.1	Ecuatia diferențială a propagării căldurii	107
6.1.1	Condiție inițială	109
6.1.2	Condiții pe frontieră sau condiții la limită	109
6.2	Alte ecuații de tip difuzie	110
6.2.1	Căldura superficială pierdută, proporțională cu diferența de temperatură	110
6.2.2	Ecuatia difuzie-convecție a poluării apelor subterane	110
6.3	Proprietăți ale soluțiilor problemelor de propagare a căldurii	112
6.4	Propagarea căldurii într-o bară de lungime finită cu condiții la limită și inițiale neomogene, în absența surselor interne de căldură	115
6.5	Propagarea temperaturii într-o bară izolată termic, cu condiție inițială nenulă și în absența surselor de căldură	116
6.6	Propagarea căldurii într-o bară finită, cu date la limită și inițiale nule, în prezența surselor interne de căldură	119
6.7	Propagarea căldurii într-o bară finită, cu condiții la limită și inițiale neomogene, în prezența unei surse interne de căldură	120
6.8	Principiul lui Duhamel pentru determinarea unei soluții particulare a ecuației neomogene a propagării temperaturii într-o bară de lungime finită	121
6.9	Problema Cauchy pentru ecuația propagării căldurii într-o dimensiune spațială	123
6.10	Problema Cauchy a ecuației propagării căldurii în n dimensiuni spațiale. Soluție fundamentală	128
6.11	Propagarea căldurii într-o bară omogenă de lungime finită, a cărei suprafață laterală este izolată termic și ale cărei extremități schimbă căldură cu exteriorul prin convecție	131
7	Ecuatii de tip eliptic	133
7.1	Ecuatia lui Laplace și ecuația lui Poisson. Soluție fundamentală	133
7.2	Proprietățile fundamentale ale funcțiilor armonice	135
7.3	Formule de reprezentare integrală	138
7.3.1	Formule de reprezentare integrală ale funcțiilor de clasă C^1 și C^2	138
7.3.2	Formulă de reprezentare integrală a unei funcții armonice	141
7.4	Formule de medie ale unei funcții armonice	142
7.5	Principiu de extrem pentru funcții armonice	142
7.6	Problema Dirichlet și problema Neumann	143
7.7	Funcția lui Green a problemei Dirichlet pentru ecuația lui Laplace	146
7.8	Potențialul de masă	147
7.9	Potențialii de simplu strat și dublu strat	149
7.10	Problema Dirichlet interioară pentru cerc	152

8 Probleme și exerciții propuse	159
8.1 Probleme propuse	159
8.2 Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri	160
8.3 Probleme cu condiții inițiale și la limită	164
Index de noțiuni	167
Bibliografie	173

0.1 Prefață

Cartea de față a fost elaborată în cadrul proiectului POSDRU/56/1.2/S/32768, "Formarea cadrelor didactice universitare și a studenților în domeniul utilizării unor instrumente moderne de predare-învățare-evaluare pentru disciplinele matematice, în vederea creării de competențe performante și practice pentru piața muncii".

Finanțat din Fondul Social European și implementat de către Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului, în colaborare cu The Red Point, Oameni și Companii, Universitatea din București, Universitatea Tehnică de Construcții din București, Universitatea "Politehnica" din București, Universitatea din Pitești, Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iași, Universitatea de Vest din Timișoara, Universitatea "Dunărea de Jos" din Galați, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, Universitatea "1 Decembrie 1918" din Alba-Iulia, proiectul contribuie în mod direct la realizarea obiectivului general al Programului Operațional Sectorial de Dezvoltare a Resurselor Umane – POSDRU și se înscrie în domeniul major de intervenție 1.2 Calitate în învățământul superior.

Proiectul are ca obiectiv adaptarea programelor de studii ale disciplinelor matematice la cerințele pieței muncii și crearea de mecanisme și instrumente de extindere a oportunităților de învățare. Evaluarea nevoilor educaționale obiective ale cadrelor didactice și studenților legate de utilizarea matematicii în învățământul superior, masterate și doctorate precum și analizarea eficacității și relevanței curriculumelor actuale la nivel de performanță și eficiență, în vederea dezvoltării de cunoștințe și competențe pentru studenții care învață discipline matematice în universități, reprezintă obiective specifice de interes în cadrul proiectului.

Dezvoltarea și armonizarea curriculumelor universitare ale disciplinelor matematice, conform exigențelor de pe piața muncii, elaborarea și implementarea unui program de formare a cadrelor didactice și a studenților interesați din universitățile partenere, bazat pe dezvoltarea și armonizarea de curriculum, crearea unei baze de resurse inovative, moderne și funcționale pentru predarea-învățarea-evaluarea în disciplinele matematice pentru învățământul universitar sunt obiectivele specifice care au ca răspuns materialul de față.

Formarea de competențe cheie de matematică și informatică presupune crearea de abilități de care fiecare individ are nevoie pentru dezvoltarea personală, incluziune socială și inserție pe piața muncii. Se poate constata însă că programele disciplinelor de matematică nu au întotdeauna în vedere identificarea și sprijinirea elevilor și studenților potențial talentați la matematică. Totuși, studiul matematicii a evoluat în exigențe până a ajunge să accepte provocarea de a folosi noile tehnologii în procesul de predare-învățare-evaluare pentru a face matematica mai atractivă. În acest context, analiza flexibilității curriculumei, însoțită de analiza metodelor și instrumentelor folosite pentru identificarea și motivarea studenților talentați la matematică ar putea răspunde deopotrivă cerințelor de masă, cât și celor de elită.

Viziunea pe termen lung a acestui proiect preconizează determinarea unor schimbări în abordarea fenomenului matematic pe mai multe planuri: informarea unui număr cât mai mare de membri ai societății în legătură cu rolul și locul matematicii în educația de bază în instrucție și în descoperirile științifice menite să îmbunătățească calitatea vieții, inclusiv popularizarea unor mari descoperiri tehnice, și nu numai, în care matematica cea mai avansată a jucat un rol hotărâtor. De asemenea, se urmărește evidențierea unor noi motivații solide pentru învățarea și studiul matematicii la nivelele de bază și la nivel de performanță; stimularea creativității și formarea la viitorii cercetători matematicieni a unei atitudini deschise față de însușirea aspectelor specifice din alte științe, în scopul participării cu succes în echipe mixte de cercetare sau a abordării unei cercetări inter și multi disciplinare; identificarea unor forme de pregătire adecvată pentru viitorii studenți ai disciplinelor matematice, în scopul utilizării la nivel de performanță a aparatului matematic în construirea unei cariere profesionale.

Lucrarea reflectă eforturile autorilor în cadrul acestui proiect și experiența lor în predarea matematicii în general și a ecuațiilor cu derivate parțiale în special la facultățile de inginerie cu profil tehnic din Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iași și respectiv Universitatea din Pitești.

Lucrarea îmbină în mod armonios prezentările teoretice cu exemple semnificative, facilitând studenților, cadrelor didactice, matematicienilor, inginerilor, cercetătorilor etc. cunoașterea, aprofundarea și utilizarea acestui foarte important domeniu al matematicilor, reprezentat de ecuațiile cu derivate parțiale.

Autorii s-au străduit să realizeze un material de studiu unitar în domeniul ecuațiilor cu derivate parțiale și speră că această lucrare elaborată în cadrul proiectului mai sus menționat va contribui la o mai bună înțelegere și asimilare a cunoștințelor de matematică și la aplicarea lor în practică.

Autorii

Capitolul 1

Sisteme de ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi

1.1 Sisteme de ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi neliniare sub formă normală

Forma generală a unui sistem de n ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi sub formă normală este

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \\ y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad (1.1)$$

Pentru un astfel de sistem se utilizează și denumirea de *sistem diferențial*.

Necunoscutele sistemului (1.1) sunt funcțiile reale y_1, y_2, \dots, y_n care depind de variabila reală x și sunt definite pe un intervalul real închis I . Funcțiile date $f_i, i = 1, 2, \dots, n$, sunt continue împreună cu derivatele lor parțiale de ordinul întâi în domeniul închis $I \times D$, unde $D \subset \mathbb{R}^n$. Funcțiile necunoscute ale unui sistem diferențial sunt numite deseori *variabile dependente*, iar x se numește *variabilă independentă*.

Dacă se introduc funcțiile vectoriale

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n), \quad \mathbf{y}' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_n),$$

atunci sistemul diferențial (1.1) se scrie în forma vectorială

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}).$$

1.1.1 Legătura cu ecuațiile diferențiale de ordinul n

Teorema 1.1.1. *Un sistem de forma (1.1) este echivalent cu o ecuație diferențială ordinară de ordinul n sub formă normală.*

Demonstrație. Fie dată o ecuație diferențială ordinară de ordinul n sub formă normală

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1.2)$$

Dacă introducem funcțiile necunoscute

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n-1)} \quad (1.3)$$

și ținem cont de ecuația (1.2) obținem sistemul de ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi sub formă normală

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \dots, \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad (1.4)$$

Din modul cum a fost obținut sistemul (1.4) se vede că dacă y este o soluție a ecuației (1.2), atunci y_1, y_2, \dots, y_n este o soluție a sistemului (1.4) și reciproc, dacă y_1, y_2, \dots, y_n este o soluție a sistemului (1.4), iar funcțiile y_1, y_2, \dots, y_n sunt cele din (1.3), atunci $y_1 = y$ este o soluție a ecuației (1.2).

Reciproc, să arătăm cum studiul unui sistem de ecuații diferențiale de forma (1.1) se reduce la studiul unei ecuații diferențiale de forma (1.2). Pentru simplificarea calculelor vom considera cazul $n = 3$. Fie deci sistemul diferențial

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, y_3), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, y_3), \\ y_3' = f_3(x, y_1, y_2, y_3). \end{cases} \quad (1.5)$$

Derivând prima ecuație din (1.5) în raport cu x , obținem

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot y_1' + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot y_2' + \frac{\partial f_1}{\partial y_3} \cdot y_3'. \quad (1.6)$$

Înlocuind în (1.6) pe y_1', y_2', y_3' cu expresiile lor (1.5), găsim

$$y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, y_3), \quad (1.7)$$

unde

$$F_2(x, y_1, y_2, y_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial y_3} \cdot f_3.$$

Dacă derivăm acum ecuația (1.7) în raport cu x și ținem cont de (1.5), obținem

$$y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, y_3), \quad (1.8)$$

unde $F_3(x, y_1, y_2, y_3) = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdot f_2 + \frac{\partial F_2}{\partial y_3} \cdot f_3$.

Din prima ecuație a sistemului (1.5) și din ecuația (1.7) se pot afla, în general, y_2 și y_3 funcție de x, y_1, y_1' și y_1'' , care înlocuite în (1.8), conduce la ecuația diferențială de ordinul trei sub formă normală

$$y_1''' = F(x, y_1, y_1', y_1''),$$

ceea ce trebuia de demonstrat.

q.e.d.

Exercițiul 1.1.1. Să se afle soluția generală a sistemului

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = -y. \end{cases}$$

Soluție. Dacă derivăm prima ecuație, obținem $y'' = z'$. Folosind a doua ecuație, găsim $y'' + y = 0$. Această ecuație este o ecuație diferențială liniară de ordinul al doilea cu coeficienți constanți omogenă, care are ecuația caracteristică $r^2 + 1 = 0$ cu rădăcinile $r_{1,2} = \pm i$.

Ca atare, un sistem fundamental de soluții pentru ecuația diferențială $y'' + y = 0$ este format din soluțiile $y_1 = \cos x$ și $y_2 = \sin x$.

Soluția generală a ecuației diferențiale $y'' + y = 0$ este o combinație liniară de cele două soluții fundamentale

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Din prima ecuație a sistemului găsim și expresia lui z ,

$$z = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

și astfel am obținut soluția generală a sistemului dat. ■

Exercițiul 1.1.2. *Să se reducă sistemul*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = z, \\ \frac{dz}{dt} = x \end{cases} \quad (1.9)$$

la o ecuație de ordin superior și să se găsească apoi soluția sa generală.

Soluție. Procedând ca în reciproca Teoremei 1.1.1 se ajunge la ecuația diferențială liniară de ordinul trei cu coeficienți constanți, omogenă

$$x''' - x = 0 \quad (1.10)$$

ce are ecuația caracteristică $r^3 - 1 = 0$ și rădăcinile caracteristice

$$r_1 = 1, \quad r_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad r_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aceste rădăcini caracteristice le corespund soluțiile fundamentale

$$x_1(t) = e^t, \quad x_2(t) = e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{t\sqrt{3}}{2}, \quad x_3(t) = e^{-\frac{t}{2}} \sin \frac{t\sqrt{3}}{2}.$$

Astfel, soluția generală a ecuației (1.10) este

$$x = C_1 e^t + e^{-\frac{t}{2}} \left(C_2 \cos \frac{t\sqrt{3}}{2} + C_3 \sin \frac{t\sqrt{3}}{2} \right). \quad (1.11)$$

Folosind sistemul, constatăm că necunoscuta y se obține derivând pe x , iar funcția z se obține derivându-l pe y . Se găsește

$$\begin{cases} y = C_1 e^t - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \left[(C_2 - C_3 \sqrt{3}) \cos \frac{t\sqrt{3}}{2} + (C_3 + C_2 \sqrt{3}) \sin \frac{t\sqrt{3}}{2} \right], \\ z = C_1 e^t - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \left[(C_2 + C_3 \sqrt{3}) \cos \frac{t\sqrt{3}}{2} + (C_3 - C_2 \sqrt{3}) \sin \frac{t\sqrt{3}}{2} \right]. \end{cases} \quad (1.12)$$

Soluția generală a sistemului (1.9) este dată de (1.11) și (1.12). ■

Exercițiul 1.1.3. Folosind **metoda eliminării** să se determine ecuația diferențială liniară de ordinul trei cu care este echivalent sistemul

$$\begin{cases} y_1' + 9y_1 + 12y_2 + 5y_3 = 0, \\ y_2' - 5y_1 - 6y_2 - 3y_3 = 0, \\ y_3' - y_1 - 4y_2 - y_3 = 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Folosind rezultatul stabilit, să se integreze sistemul (1.13).

Soluție. Derivăm prima egalitate din (1.13) și în rezultatul obținut, $y_1'' = -9y_1' - 12y_2' - 5y_3'$, înlocuim y_1' , y_2' , y_3' cu valorile date în (1.13). Găsim

$$y_1'' = 16y_1 + 16y_2 + 4y_3. \quad (1.14)$$

Procedând similar cu egalitatea (1.14), deducem

$$y_1''' = -60y_1 - 80y_2 - 28y_3. \quad (1.15)$$

Considerăm sistemul format din prima ecuație a sistemului inițial (1.13) și ecuația (1.14)

$$\begin{cases} 12y_2 + 5y_3 = -9y_1 - y_1', \\ 16y_2 + 4y_3 = -16y_1 + y_1'', \end{cases} \quad (1.16)$$

în care necunoscutele sunt y_2 și y_3 .

Rezolvând sistemul algebric (1.16), găsim

$$\begin{cases} y_2 = -\frac{11}{8}y_1 + \frac{1}{8}y_1' + \frac{5}{32}y_1'', \\ y_3 = \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_1' - \frac{3}{8}y_1''. \end{cases} \quad (1.17)$$

Valorile lui y_2 și y_3 determinate în (1.17) le înlocuim în ecuația (1.15) și astfel găsim că y_1 este soluție a ecuației diferențiale liniară și omogenă, de ordin trei, cu coeficienți constanți

$$y''' + 2y'' - 4y' - 8y = 0. \quad (1.18)$$

Ecuația caracteristică a ecuației diferențiale (1.18) este

$$r^3 + 2r^2 - 4r - 8 = 0,$$

rădăcinile sale fiind $r_1 = 2$, $r_2 = r_3 = -2$. Rădăcinii caracteristice simple $r_1 = 2$ îi corespunde soluția $y^{(1)}(x) = e^{2x}$, iar celei duble îi corespund soluțiile $y^{(2)} = e^{-2x}$ și $y^{(3)} = x e^{-2x}$.

Soluțiile astfel determinate formează un sistem fundamental de soluții al ecuației diferențiale (1.18), deci soluția sa generală este

$$y(x) = C_1 y^{(1)}(x) + C_2 y^{(2)}(x) + C_3 y^{(3)}(x).$$

Prin urmare, expresia lui y_1 este

$$y_1 = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x) e^{-2x}, \quad (1.19)$$

unde C_1, C_2, C_3 sunt constante reale arbitrare.

Pentru determinarea funcțiilor necunoscute y_2 și y_3 folosim expresiile (1.17), unde înlocuim pe y_1 , y_1' și y_1'' așa cum rezultă din (1.19). Găsim

$$\begin{cases} y_2 = -\frac{1}{2}C_1 e^{2x} - (C_2 + \frac{1}{2}C_3 + C_3 x) e^{-2x}, \\ y_3 = -C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 + C_3 x) e^{-2x}. \end{cases}$$

Prin urmare, soluția generală a sistemului (1.13) este

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x) e^{-2x}, \\ y_2 = -\frac{1}{2} C_1 e^{2x} - (C_2 + \frac{1}{2} C_3 + C_3 x) e^{-2x}, \\ y_3 = -C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 + C_3 x) e^{-2x}. \end{cases}$$

■

Exercițiul 1.1.4. Să se integreze sistemul diferențial liniar de ordinul întâi omogen cu coeficienți constanți

$$\begin{cases} y'_1 = 2y_1 + y_2 + 2y_3, \\ y'_2 = -y_1 - 2y_3, \\ y'_3 = y_1 + y_2 + 2y_3. \end{cases} \quad (1.20)$$

Soluție. Aplicând demonstrația reciprocei Teoremei 1.1.1, suntem conduși la ecuația

$$y''_1 = 5y_1 + 4y_2 + 6y_3. \quad (1.21)$$

Derivând această egalitate și înlocuind derivatele din membrul al doilea, obținem

$$y'''_1 = 12y_1 + 11y_2 + 14y_3. \quad (1.22)$$

Cu prima ecuație a sistemului diferențial (1.20) și ecuația (1.21) alcătuim sistemul

$$\begin{cases} y_2 + 2y_3 = y'_1 - 2y_1, \\ 4y_2 + 6y_3 = y''_1 - 5y_1, \end{cases}$$

din care se determină funcțiile necunoscute y_2 și y_3 în funcție de y_1 și derivatele y'_1, y''_1

$$\begin{cases} y_2 = y''_1 - 3y'_1 + y_1, \\ y_3 = -\frac{1}{2}y''_1 + 2y'_1 - \frac{3}{2}y_1. \end{cases} \quad (1.23)$$

Introducerea expresiilor lui y_2 și y_3 din (1.23) în egalitatea (1.22) conduce la ecuația diferențială liniară de ordinul al treilea, omogenă și cu coeficienți constanți

$$y'''_1 - 4y''_1 + 5y'_1 - 2y_1 = 0, \quad (1.24)$$

a cărei ecuație caracteristică,

$$r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0$$

are rădăcina dublă $r_1 = r_2 = 1$ și rădăcina simplă $r_3 = 2$. Acestor rădăcini caracteristice le corespund sistemul fundamental de soluții:

$$y_1^{(1)} = e^x; \quad y_1^{(2)} = x e^x; \quad y_1^{(3)} = e^{2x}. \quad (1.25)$$

Soluția generală a ecuației diferențiale (1.24) este combinația liniară de soluțiile sistemului fundamental de soluții (1.25)

$$y_1 = (C_1 + C_2 x) e^x + C_3 e^{2x}. \quad (1.26)$$

Celelalte două necunoscute ale sistemului (1.20) se determină din (1.23)

$$\begin{cases} y_2 = (-C_1 - C_2 - C_2x)e^x - C_3e^{2x}, \\ y_3 = C_2e^x + \frac{1}{2}C_3e^{2x}. \end{cases} \quad (1.27)$$

Prin urmare, soluția generală a sistemului (1.20) este reprezentată de funcțiile date în (1.26) și (1.27). ■

Observația 1.1.1. Rezultatele stabilite pot fi obținute într-un alt mod din care rezultă o nouă metodă de rezolvare a sistemelor diferențiale de tipul (1.20) și anume **metoda valorilor și vectorilor proprii**.

1.1.2 Integrale prime. Soluție generală

În ipotezele menționate pentru funcțiile f_1, f_2, \dots, f_n se poate demonstra că există o soluție unică a sistemului (1.1) care, pentru $x = x_0$, ia valorile prescrise

$$y_i(x_0) = y_i^{(0)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.28)$$

unde $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ este un punct arbitrar din interiorul mulțimii $I \times D$.

Fie această soluție

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x; x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}), \\ y_2 = \varphi_2(x; x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}), \\ \dots, \\ y_n = \varphi_n(x; x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}). \end{cases} \quad (1.29)$$

Această formă a soluției pune în evidență dependența sa de datele inițiale $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$.

Geometric, (1.29) reprezintă ecuațiile parametrice ale unei curbe Γ în spațiul linear n dimensional \mathbb{R}^n , care trece prin punctul $M_0(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$. Curba Γ se numește *curbă integrală* sau *traietorie* a sistemului diferențial (1.1). Punctul $M_0 \in \Gamma$ se numește *punct inițial*.

Fie acum un punct oarecare $M(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \Gamma$, diferit de M_0 , corespunzător valorii $x \in (a, b)$. Valorile $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ și y_1, y_2, \dots, y_n sunt legate prin relațiile (1.29).

Dacă schimbăm rolurile punctelor M_0 și M , deci M devine punct inițial, $M_0 \in \Gamma$ fiind variabil, în baza unicătății soluției, curba integrală care trece prin M trece și prin M_0 . Prin urmare, avem

$$\begin{cases} y_1^{(0)} = \varphi_1(x_0; x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2^{(0)} = \varphi_2(x_0; x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots, \\ y_n^{(0)} = \varphi_n(x_0; x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad (1.30)$$

Relațiile (1.30) arată că sistemul (1.29) s-a putut rezolva unic în raport cu valorile inițiale $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$, iar funcțiile din membrul drept admit derivate parțiale continue în raport cu x, y_1, y_2, \dots, y_n .

Cum datele inițiale se pot alege arbitrar în interiorul lui D , notându-le în (1.30) cu C_1, C_2, \dots, C_n (constante arbitrare), obținem ansamblul de relații

$$\begin{cases} \psi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_1, \\ \psi_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_2, \\ \dots, \\ \psi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_n, \end{cases} \quad (1.31)$$

unde $\psi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = \varphi_i(x_0; x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, iar x_0 este dat.

Dar relațiile (1.31) pot fi rezolvate în mod unic în raport cu variabilele y_1, y_2, \dots, y_n , deci

$$\begin{cases} y_1 = \bar{\varphi}_1(x; C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y_2 = \bar{\varphi}_2(x; C_1, C_2, \dots, C_n), \\ \dots, \\ y_n = \bar{\varphi}_n(x; C_1, C_2, \dots, C_n). \end{cases} \quad (1.32)$$

Relațiile (1.31) reprezintă *soluția generală sub formă implicită* a sistemului (1.1). În loc de soluție generală se utilizează și termenul de *ansamblu de integrale prime* sau *integrală generală* a sistemului. Oricare din ecuațiile (1.31) se numește *integrală primă* a sistemului (1.1).

Soluția generală a sistemului diferențial (1.1), sub formă explicită, este dată de relațiile (1.32).

Din modul cum au fost deduse relațiile (1.31) constatăm că o funcție $\psi(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ este integrală primă numai dacă (y_1, y_2, \dots, y_n) verifică sistemul (1.1).

Astfel, putem da două definiții echivalente pentru integrala primă a unui sistem de ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi.

Definiția 1.1.1. Se numește **integrală primă** a sistemului de ecuații diferențiale (1.1) orice relație obținută rezolvând în raport cu constantele arbitrare soluția lui generală (1.32).

Așadar, oricare din relațiile (1.31) este o integrală primă a sistemului (1.1).

În baza existenței și unicității unei soluții a sistemului (1.1) care trece printr-un punct dat din interiorul mulțimii $I \times D$, rezolvarea în raport cu constantele arbitrare a relațiilor (1.32) este întotdeauna posibilă.

Definiția de mai sus poate fi dată numai după ce se cunoaște soluția generală a sistemului.

Definiția 1.1.2. Funcția $\psi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}$ este o **integrală primă** a sistemului (1.1) pe o submulțime deschisă Ω a mulțimii $[a, b] \times D$, dacă ψ este de clasă $C^1(\Omega)$, nu este identic constantă dar

$$\psi(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)) \equiv \text{constant},$$

de-a lungul oricărei traiectorii $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$ a sistemului (1.1).

Observația 1.1.2. Cu Definiția 1.1.2 putem spune că un sistem de ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi admite o infinitate de integrale prime deoarece funcția

$$\Phi[\psi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \psi_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, \psi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)],$$

unde Φ este o funcție arbitrară de integralele prime ψ_i , este la rândul ei o integrală primă a sistemului (1.1).

Teorema 1.1.2. Rezolvarea sistemului (1.1) este echivalentă cu obținerea a n integrale prime independente.

Demonstrație. Fie n integrale prime (1.31) independente funcțional, deci pentru care determinantul funcțional

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} \neq 0.$$

Aplicând teorema de existență și unicitate a sistemelor de funcții definite implicit [13], din (1.31) deducem relațiile (1.32) care constituie soluția generală a sistemului. **q.e.d.**

Observația 1.1.3. *Cunoașterea unei singure integrale prime a sistemului (1.1) reduce rezolvarea sistemului la $n - 1$ ecuații cu $n - 1$ funcții necunoscute.*

Într-adevăr, din $\psi_1(x; y_1, y_2, \dots, y_n) = C$ se poate exprima una din funcțiile necunoscute, de exemplu y_n , în funcție de $x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ și C

$$y_n = (x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, C).$$

Înlocuindu-l în primele $n - 1$ ecuații ale sistemului (1.1) obținem un sistem de $n - 1$ ecuații diferențiale cu $n - 1$ funcții necunoscute. ■

Observația 1.1.4. *Sistemul (1.1) este echivalent cu sistemul*

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \dots = \frac{dy_n}{f_n}. \quad (1.33)$$

Acest sistem este echivalent la rândul său cu cel obținut prin înmulțirea rapoartelor cu un același factor, care poate fi funcție de $n + 1$ variabile, și anume x, y_1, y_2, \dots, y_n .

În cele ce urmează considerăm că numărul variabilelor este n și că sunt notate cu x_1, x_2, \dots, x_n , iar una dintre ele este dependentă de celelalte $n - 1$, ceea ce înseamnă că putem scrie sistemul de ecuații diferențiale în forma

$$\frac{dx_1}{X_1(\mathbf{x})} = \frac{dx_2}{X_2(\mathbf{x})} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(\mathbf{x})}, \quad (1.34)$$

unde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, care se numește *forma simetrică* a sistemului de $n - 1$ ecuații diferențiale de ordinul întâi cu $n - 1$ necunoscute.

1.2 Sisteme diferențiale sub formă simetrică

Să considerăm sistemul simetric (1.34) în care funcțiile X_i sunt continue și au derivate parțiale continue în raport cu toate variabilele x_1, x_2, \dots, x_n .

Conform paragrafului precedent, soluția generală a sistemului simetric (1.34) este ansamblul

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_2, \\ \dots, \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_{n-1}, \end{cases} \quad (1.35)$$

format din $n - 1$ integrale prime oarecare independente funcțional, în sensul că rangul matricei jacobiene al funcțiilor $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ este egal cu $n - 1$ în interiorul mulțimii de existență a funcțiilor X_1, X_2, \dots, X_n .

Dacă dorim să trecem un sistem de la forma simetrică (1.34) la forma normală, este suficient să alegem una din variabile, de exemplu x_n , ca variabilă independentă. În acest fel, din (1.34) avem

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \\ \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \\ \dots, \\ \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \end{cases} \quad (1.36)$$

Observația 1.2.1. Pentru valorile inițiale $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$, valoarea funcției X_n nu trebuie să se anuleze. Dacă acest lucru nu este posibil, alegem altă variabilă independentă.

Teorema 1.2.1. Relația

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = C \quad (1.37)$$

este o integrală primă a sistemului simetric (1.34) dacă și numai dacă, de-a lungul unei curbe integrale a sistemului (1.36), avem

$$X_1(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \dots + X_n(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_n} = 0, \quad (1.38)$$

unde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Demonstrație. Dacă funcția ψ din (1.37) este o integrală primă a sistemului (1.36), atunci de-a lungul unei curbe integrale a sistemului (1.36), $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ are o valoare constantă, deci diferențiala ei totală este nulă ceea ce conduce la

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \cdot dx_n = 0. \quad (1.39)$$

Deoarece de-a lungul unei curbe integrale diferențialele dx_i sunt proporționale cu valorile funcțiilor X_i (vezi (1.34)), avem (1.38).

Reciproc, din (1.38) rezultă (1.39) și deci $d\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ de-a lungul unei curbe integrale, ceea ce este echivalent cu $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \text{constantă}$ pentru orice soluție a sistemului (1.36). **q.e.d.**

Observația 1.2.2. Conform Definiției 1.1.1, ψ este o integrală primă a sistemului (1.36) sau a sistemului simetric (1.34).

Observația 1.2.3. Singurele funcții reale de n variabile reale care verifică relația (1.38) sunt integralele prime ale sistemului (1.34).

Din punct de vedere geometric, soluția generală (1.35) reprezintă o familie de curbe obținută prin intersecția suprafețelor $\psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_i$, $i = \overline{1, n-1}$. Această familie de curbe este inclusă în intersecția domeniilor de definiție ale funcțiilor $X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ și depinde de $n-1$ parametri C_1, C_2, \dots, C_{n-1} .

Aducerea unui sistem de ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi la forma simetrică este indicată pentru aflarea integralelor prime și, în consecință, pentru aflarea soluției sale generale.

Exercițiul 1.2.1. Să se determine soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale sub formă normală

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{z}{(z-y)^2}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{y}{(z-y)^2}, \quad y \neq z \neq 0. \end{cases}$$

Soluție. Forma simetrică a acestui sistem este

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}.$$

Căutăm două combinații integrabile care să poată furniza cele două integrale prime independente.

O integrală primă se obține din ultimele două rapoarte scrise în forma $ydy - zdz = 0$ care implică $d(y^2 - z^2) = 0$ și deci $y^2 - z^2 = C_1$ este prima integrală primă (o familie uniparametrică de cilindri hiperbolici cu generatoarele paralele cu axa Ox).

Cea de a doua integrală primă se va obține după ce aplicăm o proprietate a șirului de rapoarte egale. Astfel, avem

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dz - dy}{y-z}.$$

După simplificarea prin $y - z$ se obține

$$dx + (y - z)d(y - z) = 0,$$

care conduce la cea de a doua integrală primă $2x + (y - z)^2 = C_2$ (familie uniparametrică de quadrice).

Soluția generală a sistemului, sub formă implicită, este dată de

$$\begin{cases} y^2 - z^2 = C_1, \\ 2x + (y - z)^2 = C_2 \end{cases}$$

și reprezintă o familie dublu parametrică de curbe în spațiu. ■

Exercițiul 1.2.2. Să se determine soluția generală a sistemului simetric

$$\frac{dx}{2y(2a - x)} = \frac{dy}{x^2 + z^2 - y^2 - 4ax} = \frac{dz}{-2yz},$$

unde $a \in \mathbb{R}$, $x \neq 2a$, $y \neq 0$ și $z \neq 0$.

Soluție. Egalitatea rapoartelor extreme ne conduce la combinația integrabilă

$$\frac{dx}{x - 2a} = \frac{dz}{z},$$

care dă integrala primă

$$\frac{x - 2a}{z} = C_1.$$

Dacă scriem această egalitate în forma $x - C_1 z - 2a = 0$, constatăm că integrala primă reprezintă o familie de plane paralele cu axa Oy .

O altă combinație integrabilă este

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{-y(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{dz}{-2yz} \implies \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dz}{z},$$

din care se obține cea de a doua integrală primă

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z} = C_2.$$

Dacă scriem rezultatul găsit în forma $x^2 + y^2 + z^2 - C_2 z = 0$, constatăm că cea de a doua integrală primă reprezintă o familie de sfere cu centrele pe axa Oz , tangente în origine planului xOy .

Soluția generală a sistemului simetric este ansamblul celor două integrale prime

$$\begin{cases} \frac{x - 2a}{z} = C_1, \\ \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z} = C_2. \end{cases}$$

Așadar, curbele integrale sunt o familie dublu parametrică de cercuri în spațiu. ■

Exercițiul 1.2.3. Să se găsească soluția generală a sistemului simetric

$$\frac{dx}{x(x+y)} = \frac{dy}{-y(x+y)} = \frac{dz}{(y-x)(2x+2y+z)}.$$

Soluție. Din primele două rapoarte se obține integrala primă

$$xy = C_1. \quad (1.40)$$

Vom căuta acum a doua combinație integrabilă. Efectuând raportul dintre suma numărătorilor și suma numitorilor primelor două rapoarte, vom obține un raport egal cu al treilea

$$\frac{dx+dy}{x^2-y^2} = \frac{-dz}{(x-y)(2x+2y+z)}.$$

După simplificarea cu $x-y$, se obține

$$\frac{dx+dy}{x+y} = \frac{-dz}{2x+2y+z}.$$

Efectuând diferența numărătorilor pe diferența numitorilor, obținem un raport egal cu primul

$$\frac{dx+dy}{x+y} = -\frac{dx+dy+dz}{x+y+z},$$

din care deducem $\frac{dx+dy}{x+y} + \frac{dx+dy+dz}{x+y+z} = 0$. Integrând, obținem

$$(x+y)(x+y+z) = C_2. \quad (1.41)$$

Soluția generală a sistemului este ansamblul integralelor prime (1.40) și (1.41). ■

1.3 Sisteme de ecuații diferențiale liniare

În acest paragraf vom determina soluțiile sistemelor de ecuații diferențiale liniare de ordinul întâi. Forma generală a unui astfel de sistem este

$$\begin{cases} y_1' + a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n = f_1(x), \\ y_2' + a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n = f_2(x), \\ \cdots, \\ y_n' + a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n = f_n(x). \end{cases} \quad (1.42)$$

Presupunem că funcțiile a_{ij} și f_i , $i, j = \overline{1, n}$, sunt continue pe intervalul $[a, b]$.

Dacă toți $f_i(x) \equiv 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, spunem că sistemul este *omogen*. În caz contrar sistemul este *neomogen*. Sistemul (1.42) se poate scrie în forma vectorială

$$\mathbf{y}' + \mathbf{e}(A(x)Y) = \mathbf{f}(x), \quad (1.43)$$

unde $\mathbf{y} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ este o funcție vectorială necunoscută, de variabilă reală, derivabilă, care în baza canonică din \mathbb{R}^n ,

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1),$$

are coordonatele y_1, y_2, \dots, y_n , $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)^n$, $A(x) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ este o matrice cu elementele $a_{ij}(x)$, Y este matricea cu o singură coloană și elemente coordonatele vectorului \mathbf{y} , adică $\mathbf{y} = \mathbf{e}Y$, iar $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ este funcție vectorială de o variabilă reală, cunoscută.

Definiția 1.3.1. Fie q un număr natural. Spunem că funcția vectorială de variabilă reală $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ este de clasă $C^q([a, b])$ dacă funcțiile coordonate g_i , $i = \overline{1, n}$, sunt continue și au derivate continue până la ordinul q inclusiv.

Mulțimea $C^q([a, b])$ este spațiu liniar real infinit dimensional. Pentru $C^0([a, b])$ vom folosi notația $C([a, b])$.

Definiția 1.3.2. Se numește **soluție** a sistemului (1.43) funcția vectorială de variabilă reală

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

de clasă $C^1([a, b])$, care satisface egalitatea

$$\varphi'(x) + \mathbf{e}(A(x)\Phi(x)) = \mathbf{f}(x), \quad (\forall) x \in [a, b],$$

unde Φ este matricea coloană cu elementele $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$.

1.3.1 Sisteme de ecuații diferențiale liniare și omogene

Fie sistemul (1.43) și să notăm

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}' + \mathbf{e}(A(x)\mathbf{y}). \quad (1.44)$$

Atunci sistemul (1.43), în forma omogenă, se scrie

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}, \quad (1.45)$$

unde $\mathbf{0}$ este funcția vectorială identic nulă $\mathbf{0} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.3.1. Aplicația vectorială \mathbf{L} este un operator liniar definit pe spațiul vectorial $C^1([a, b])$ și cu valori în spațiul vectorial $C([a, b])$.

Demonstrație. Prima parte a teoremei este evidentă dacă avem în vedere expresia (1.44) a operatorului \mathbf{L} și continuitatea funcțiilor a_{ij} .

Se vede apoi că operatorul \mathbf{L} are proprietatea

$$\mathbf{L}(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\mathbf{L}(\varphi) + \beta\mathbf{L}(\psi), \quad (1.46)$$

oricare ar fi numerele α și β , reale sau complexe, și oricare ar fi funcțiile vectoriale de variabilă reală $\varphi, \psi \in C^1([a, b])$. **q.e.d.**

A integra sistemul liniar și omogen (1.43) de ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi, cu coeficienți variabili, înseamnă a găsi toate soluțiile lui. Observăm că dacă $\mathbf{y} \in C^1([a, b])$ este o soluție a sistemului (1.45), atunci imaginea lui \mathbf{y} prin operatorul \mathbf{L} este elementul nul din $C([a, b])$. Prin urmare, mulțimea soluțiilor sistemului (1.45) coincide cu nucleul operatorului liniar \mathbf{L} , deci cu $\text{Ker } \mathbf{L}$.

Operatorul \mathbf{L} fiind liniar, rezultă că $\text{Ker } \mathbf{L}$ este un spațiu liniar, subspațiu liniar al spațiului liniar infinit dimensional $C([a, b])$.

Observația 1.3.1. Dacă coeficienții sistemului omogen (1.45) sunt funcții reale, iar funcția vectorială $\varphi + i\psi$ este o soluție complexă a sistemului omogen (1.45), atunci funcțiile vectoriale de variabilă reală φ și ψ sunt soluții ale acestui sistem.

Într-adevăr, din (1.46) rezultă

$$\mathbf{L}(\varphi + i\psi) = \mathbf{L}(\varphi) + i\mathbf{L}(\psi) = \mathbf{0},$$

deoarece $\varphi + i\psi$ este o soluție a sistemului. Cum $\mathbf{L}(\varphi)$ și $\mathbf{L}(\psi)$ sunt funcții reale, deducem $\mathbf{L}(\varphi) = \mathbf{0}$ și $\mathbf{L}(\psi) = \mathbf{0}$, adică funcțiile reale φ și ψ sunt soluții ale sistemului (1.45). ■

Să considerăm un punct oarecare $x_0 \in [a, b]$ și $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ numere reale arbitrare.

*Problema lui Cauchy*¹ pentru sistemul (1.45) constă în determinarea acelei soluții \mathbf{y} a sistemului care să verifice *condiția lui Cauchy* (*condiția inițială*)

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}^{(0)}, \quad (1.47)$$

unde $\mathbf{y}^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$.

Teorema de existență și unicitate [35] a soluției problemei lui Cauchy pentru sistemul (1.45) pune în evidență un element $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \text{Ker } \mathbf{L}$ care satisface condiția (1.47).

Teorema 1.3.2. *Mulțimea $\text{Ker } \mathbf{L}$ este un spațiu vectorial real de dimensiune n .*

Demonstrație. Să considerăm mulțimea de soluții ale sistemului (1.45)

$$\{\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}\} \quad (1.48)$$

care verifică următoarele condiții ale lui Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{(1)}(x_0) = (1, 0, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{y}^{(2)}(x_0) = (0, 1, 0, \dots, 0), \\ \dots, \\ \mathbf{y}^{(n)}(x_0) = (0, 0, 0, \dots, 1) \end{cases} \quad (1.49)$$

și să arătăm că elementele acestei mulțimi, ca elemente ale spațiului $\text{Ker } \mathbf{L}$, sunt liniar independente. Vom demonstra prin reducere la absurd.

Presupunem deci că soluțiile sunt liniar dependente. Atunci există constantele C_1, C_2, \dots, C_n , nu toate nule, astfel încât

$$C_1\mathbf{y}^{(1)}(x) + C_2\mathbf{y}^{(2)}(x) + \dots + C_n\mathbf{y}^{(n)}(x) = \mathbf{0}, \quad (\forall) x \in [a, b]. \quad (1.50)$$

În particular, (1.50) are loc pentru x_0 și atunci, din (1.49) și (1.50), avem

$$(C_1, C_2, \dots, C_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

din care deducem că toate constantele C_1, C_2, \dots, C_n sunt egale cu zero, ceea ce contrazice ipoteza.

Prin urmare, soluțiile (1.48) sunt *liniar independente*.

Să arătăm că soluțiile (1.48) constituie o bază în $\text{Ker } \mathbf{L}$.

Pentru aceasta, trebuie demonstrat că orice $\mathbf{y} \in \text{Ker } \mathbf{L}$ se scrie ca o combinație liniară de elementele din (1.48), deci că există constantele reale C_1, C_2, \dots, C_n astfel încât

$$\mathbf{y} = C_1\mathbf{y}^{(1)} + C_2\mathbf{y}^{(2)} + \dots + C_n\mathbf{y}^{(n)}, \quad (1.51)$$

sau

$$\mathbf{y}(x) = C_1\mathbf{y}^{(1)}(x) + C_2\mathbf{y}^{(2)}(x) + \dots + C_n\mathbf{y}^{(n)}(x), \quad (\forall) x \in [a, b]. \quad (1.52)$$

¹Cauchy, Augustin Louis (1789 – 1857), ilustru matematician și inginer francez. A demarat un proiect important de reformulare și demonstrare riguroasă a teoremelor de algebră, a fost unul dintre pionierii analizei matematice și a adus o serie de contribuții și în domeniul fizicii. Datorită perspicacității și rigurozității metodelor sale, Cauchy a avut o influență extraordinară asupra contemporanilor și predecesorilor săi. Catolic și roialist fervent, a manifestat o prezență socială activă.

Scriind că (1.52) are loc și pentru x_0 și folosind (1.49), găsim

$$(y_1(x_0), y_2(x_0), \dots, y_n(x_0)) = (C_1, C_2, \dots, C_n),$$

din care deducem că C_i din (1.51) sunt unic determinate și

$$C_1 = y_1(x_0), \quad C_2 = y_2(x_0), \quad \dots, \quad C_n = y_n(x_0).$$

Prin urmare, soluția considerată se scrie în mod unic în forma

$$\mathbf{y} = y_1(x_0)\mathbf{y}^{(1)} + y_2(x_0)\mathbf{y}^{(2)} + \dots + y_n(x_0)\mathbf{y}^{(n)}.$$

Am dovedit astfel că orice $\mathbf{y} \in \text{Ker } \mathbf{L}$ se exprimă unic ca o combinație liniară a vectorilor (1.48), liniar independenți în $\text{Ker } \mathbf{L}$, ceea ce arată că mulțimea (1.48) este o bază în $\text{Ker } \mathbf{L}$.

Prin urmare, $\text{Ker } \mathbf{L}$ este spațiu vectorial real n dimensional.

q.e.d.

Definiția 1.3.3. Vom spune că n soluții $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}$ ale sistemului (1.45) formează un **sistem fundamental de soluții** pe intervalul $[a, b]$ dacă ele sunt liniar independente în spațiul liniar n -dimensional $\text{Ker } \mathbf{L}$.

Cum dimensiunea lui $\text{Ker } \mathbf{L}$ este n rezultă că orice bază din $\text{Ker } \mathbf{L}$ este un sistem fundamental de soluții a sistemului (1.45).

1.3.2 Matricea fundamentală a unui sistem omogen

Definiția 1.3.4. Matricea pătratică $\Gamma(x)$, de ordinul n , ale cărei coloane sunt coordonatele vectorilor $\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \dots, \mathbf{y}^{(n)}(x)$ care formează un sistem fundamental de soluții al sistemului liniar și omogen de ecuații diferențiale de ordinul întâi, cu coeficienți variabili (1.45), se numește **matricea fundamentală** a sistemului.

Teorema 1.3.3. Fie $\Gamma(x)$ o matrice fundamentală a sistemului (1.45), $\Gamma'(x)$ matricea formată din derivatele elementelor matricei $\Gamma(x)$ și O matricea nulă pătratică de ordinul n . Atunci

$$\Gamma'(x) + A(x)\Gamma(x) = O, \quad (\forall) x \in [a, b]. \quad (1.53)$$

Demonstrație. Identitatea (1.53) este evidentă deoarece reprezintă scrierea matriceală a identităților

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}^{(i)}) = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

care exprimă faptul că funcțiile vectoriale $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}$ sunt soluții ale sistemului (1.45).

q.e.d.

Observația 1.3.2. Matricea fundamentală a unui sistem omogen nu este unică.

Într-adevăr, orice matrice $\tilde{\Gamma}(x) = \Gamma(x) \cdot C$, unde C este o matrice pătratică constantă de ordinul n nesară, este, de asemenea, o matrice fundamentală a sistemului (1.45).

Reciproc, orice matrice fundamentală $\tilde{\Gamma}(x)$ a sistemului (1.45) se poate reprezenta sub forma

$$\tilde{\Gamma}(x) = \Gamma(x) \cdot C, \quad x \in [a, b], \quad (1.54)$$

unde C este o matrice constantă de tip $n \times n$ nesară.

Ultima afirmație rezultă din corolarul următor. ■

Corolarul 1.3.1. *Dacă $\Gamma(x)$ este o matrice fundamentală a sistemului de ecuații diferențiale (1.45), atunci orice soluție a acestuia se reprezintă sub forma*

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{e}(\Gamma(x)C), \quad x \in [a, b], \quad (1.55)$$

unde C este matricea coloană a coordonatelor unui vector constant din \mathbb{R}^n .

Demonstrație. Formula (1.55) rezultă din faptul că pe coloanele matricei $\Gamma(x)$ sunt coordonatele vectorilor unei baze din spațiul soluțiilor sistemului (1.45). Astfel, (1.55) este exprimarea unui vector a unui spațiu liniar n dimensional într-o bază. q.e.d.

1.3.3 Determinantul lui Wronski

Ca și la studiul ecuațiilor diferențiale liniare, omogene de ordinul n , cu coeficienți constanți, se poate introduce *determinantul lui Wronski*² sau *wronskianul* asociat unui sistem fundamental de soluții

$$W[\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}] = \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_1^{(2)}(x) & \cdots & y_1^{(n)}(x) \\ y_2^{(1)}(x) & y_2^{(2)}(x) & \cdots & y_2^{(n)}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n^{(1)}(x) & y_n^{(2)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}. \quad (1.56)$$

Pentru valorile funcției introdusă în (1.56) se pot utiliza notațiile $W(x)$ sau $W[\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}](x)$.

Observația 1.3.3. *Wronskianul $W[\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}]$ asociat sistemului fundamental de soluții*

$$\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \dots, \mathbf{y}^{(n)}(x)$$

este determinantul matricei fundamentale $\Gamma(x)$.

Teorema 1.3.4. *Condiția necesară și suficientă ca soluțiile*

$$\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)},$$

ale sistemului (1.45), să formeze un sistem fundamental de soluții a acestuia este ca determinantul lui Wronski corespunzător să nu fie identic nul pe intervalul $[a, b]$.

²Hoöné – Wronski, Josef Maria (1776 – 1853), filozof Messianist polonez, dar și matematician, fizician, inventator, avocat și economist. S-a născut Hoöné, dar și-a schimbat numele în 1815.

Demonstrație. Să arătăm mai întâi suficiența, adică din

$$\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)} \in \text{Ker } \mathbf{L} \quad \text{și} \quad W[\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}] \Big|_{x=x_0} \neq 0$$

să rezulte că funcțiile

$$\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)} \quad (1.57)$$

formează un sistem fundamental de soluții pentru sistemul (1.45).

Demonstrația se face prin reducere la absurd.

Presupunem că funcțiile $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}$, ca elemente ale lui $\text{Ker } \mathbf{L}$, sunt liniar dependente. Există atunci n constante, nu toate nule, astfel încât pentru orice $x \in [a, b]$ să avem

$$C_1 \mathbf{y}^{(1)}(x) + C_2 \mathbf{y}^{(2)}(x) + \dots + C_n \mathbf{y}^{(n)}(x) = \mathbf{0}. \quad (1.58)$$

Scriind (1.58) pe componente și luând $x = x_0$, deducem

$$\begin{cases} C_1 y_1^{(1)}(x_0) + C_2 y_1^{(2)}(x_0) + \dots + C_n y_1^{(n)}(x_0) = 0, \\ C_1 y_2^{(1)}(x_0) + C_2 y_2^{(2)}(x_0) + \dots + C_n y_2^{(n)}(x_0) = 0, \\ \dots, \\ C_1 y_n^{(1)}(x_0) + C_2 y_n^{(2)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n)}(x_0) = 0. \end{cases} \quad (1.59)$$

Am obținut astfel un sistem liniar și omogen de n ecuații cu n necunoscute al cărui determinant este $W[\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \dots, \mathbf{y}^{(n)}(x)] \Big|_{x=x_0}$, care prin ipoteză este diferit de zero, deci sistemul (1.59) are numai soluția banală $C_1 = 0, C_2 = 0, \dots, C_n = 0$, ceea ce contrazice presupunerea.

Deci, soluțiile (1.57) sunt liniar independente.

În baza Definiției 1.3.3, funcțiile (1.57) formează un sistem fundamental de soluții al sistemului (1.45) pe intervalul $[a, b]$.

Să demonstrăm necesitatea. Dacă soluțiile $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}$ sunt liniar independente atunci, măcar într-un punct $x_0 \in [a, b]$, determinantul lui Wronski asociat acestor soluții este diferit de zero.

Deoarece $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}$ formează o bază în $\text{Ker } \mathbf{L}$, orice $\mathbf{y} \in \text{Ker } \mathbf{L}$ se scrie în mod unic în forma

$$\mathbf{y} = C_1 \mathbf{y}^{(1)} + C_2 \mathbf{y}^{(2)} + \dots + C_n \mathbf{y}^{(n)}. \quad (1.60)$$

Considerând un $x_0 \in [a, b]$, notând $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}^{(0)}$ și scriind (1.60) pe coordonate în x_0 , obținem

$$\begin{cases} C_1 y_1^{(1)}(x_0) + C_2 y_1^{(2)}(x_0) + \dots + C_n y_1^{(n)}(x_0) = y_1^{(0)}, \\ C_1 y_2^{(1)}(x_0) + C_2 y_2^{(2)}(x_0) + \dots + C_n y_2^{(n)}(x_0) = y_2^{(0)}, \\ \dots, \\ C_1 y_n^{(1)}(x_0) + C_2 y_n^{(2)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n)}(x_0) = y_n^{(0)}. \end{cases} \quad (1.61)$$

Deoarece sistemul (1.61) are soluția unică C_1, C_2, \dots, C_n , rezultă că determinantul sistemului,

$$W[\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \dots, \mathbf{y}^{(n)}(x)] \Big|_{x=x_0},$$

este nenul.

q.e.d.

Teorema 1.3.5. (Liouville³) Dacă funcția

$$W(x) = W[\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \dots, \mathbf{y}^{(n)}(x)]$$

este wronskianul unui sistem de n soluții ale sistemului (1.45), atunci are loc egalitatea

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x \text{tr} A(t) dt}, \quad (\forall) x, x_0 \in [a, b], \quad (1.62)$$

unde $\text{tr} A(t) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(t)$ este urma matricei A a sistemului.

Demonstrație. Fără a restrânge generalitatea, presupunem că sistemul $\{\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \dots, \mathbf{y}^{(n)}(x)\}$ este liniar independent (în caz contrar $W(x) \equiv 0$ și (1.62) este banal satisfăcută).

Fie $\Gamma(x)$ matricea fundamentală cu coloanele $\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \dots, \mathbf{y}^{(n)}(x)$.

Din teorema creșterilor finite, avem $\Gamma(x + \varepsilon) = \Gamma(x) + \varepsilon \Gamma'(x) + o(\varepsilon)$, $x \in [a, b]$, iar din ecuația (1.53) rezultă

$$\Gamma(x + \varepsilon) = \Gamma(x) - \varepsilon A(x) \Gamma(x) + o(\varepsilon), \quad x \in [a, b]. \quad (1.63)$$

Dacă în egalitatea (1.63) luăm determinantul ambelor membri, obținem:

$$W(x + \varepsilon) = \det(I_n - \varepsilon A(x) + o(\varepsilon) \Gamma^{-1}(x)) W(x) = W(x) (1 - \varepsilon \text{tr} A(x) + o(\varepsilon)),$$

unde ε este arbitrar și suficient de mic. Trecând la limită pentru $\varepsilon \rightarrow 0$, rezultă

$$W'(x) = -\text{tr} A(x) W(x), \quad x \in [a, b],$$

iar prin integrare se obține formula (1.62).

q.e.d.

1.3.4 Soluția generală a sistemului omogen de ecuații diferențiale liniare

Să presupunem că avem un sistem fundamental de soluții

$$\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \dots, \mathbf{y}^{(n)}(x)$$

al sistemului (1.45). Orice altă soluție a sistemului se scrie în mod unic în forma (1.60), unde C_1, C_2, \dots, C_n sunt constante arbitrare.

Putem afirma că (1.60) constituie *soluția generală* a sistemului (1.45), deoarece verifică sistemul, are în componența sa n constante arbitrare și oricărei probleme de tip Cauchy a sistemului i se pot preciza în mod unic sistemul de constante C_1, C_2, \dots, C_n astfel încât soluția determinată să satisfacă condiția inițială $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}^{(0)}$, cu $\mathbf{y}^{(0)}$ vector arbitrar din \mathbb{R}^n .

Cum vectorul din membrul drept al relației (1.60) se poate scrie în forma $\mathbf{e}(\Gamma(x)C)$, unde C este matrice cu o singură coloană și cu n linii, rezultă că soluția generală a sistemului (1.45) poate fi scrisă și în forma (1.55).

Observația 1.3.4. Sistemul fundamental de soluții pentru (1.45) nu este unic.

Într-adevăr, se știe că într-un spațiu liniar n dimensional există o infinitate de baze. Dacă mulțimea de funcții $\{\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \dots, \mathbf{y}^{(n)}(x)\}$ este o bază în $\text{Ker } \mathbf{L}$ și $(C_j^i)_{i,j=1,n}$ este o matrice pătratică neregulară,

³Liouville, Joseph (1809 - 1882), matematician francez.

atunci sistemul de vectori

$$\tilde{\mathbf{y}}^{(i)} = \sum_{j=1}^n C_j^i \mathbf{y}^{(j)}, \quad i \in \overline{1, n}, \quad (1.64)$$

formează de asemeni o bază în $\text{Ker } \mathbf{L}$ și deci avem un alt sistem fundamental de soluții.

Matricea constantă \mathbf{C} din (1.64) este matricea de trecere de la baza $\{\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \dots, \mathbf{y}^{(n)}(x)\}$ la sistemul de vectori

$$\{\tilde{\mathbf{y}}^{(1)}(x), \tilde{\mathbf{y}}^{(2)}(x), \dots, \tilde{\mathbf{y}}^{(n)}(x)\}. \quad (1.65)$$

Dacă această matrice de trecere este și nesară, sistemul de vectori (1.65) este, de asemenea, sistem fundamental de soluții pentru sistemul (1.45). ■

1.4 Sisteme neomogene de ecuații diferențiale liniare de ordinul întâi

Să considerăm sistemul liniar și neomogen de ecuații diferențiale de ordinul întâi

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}' + \mathbf{e}(A(x)Y) = \mathbf{f}(x), \quad (1.66)$$

în care matricea $A(x) = (a_{ij}(x)) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ a coeficienților sistemului are elemente funcții continue pe intervalul $[a, b]$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in C([a, b])$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in C^1([a, b])$, iar $Y = (y_i)_{1 \times n}$ este matricea coloană cu n linii a necunoscutelor $y_i \in C^1([a, b])$ ale sistemului.

Ne propunem să determinăm soluțiile sistemului (1.66) prin *metoda variației constantelor a lui Lagrange*⁴. Vom cerceta dacă soluția generală a sistemului (1.66) se poate obține din soluția generală (1.60) a sistemului omogen asociat sistemului (1.66), înlocuind constantele C_1, C_2, \dots, C_n prin funcțiile convenabil alese

$$C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x). \quad (1.67)$$

Dacă mulțimea $\{\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \dots, \mathbf{y}^{(n)}(x)\}$ este un sistem fundamental de soluții a sistemului omogen asociat $\mathbf{L}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, atunci vom determina funcțiile (1.67) continue și cu derivate continue pe $[a, b]$, astfel încât

$$\mathbf{y}(x) = C_1(x)\mathbf{y}^{(1)}(x) + C_2(x)\mathbf{y}^{(2)}(x) + \dots + C_n(x)\mathbf{y}^{(n)}(x) \quad (1.68)$$

să fie soluție a sistemului neomogen (1.66). Impunând aceasta și ținând cont că $\mathbf{y}^{(i)}, i = \overline{1, n}$, sunt soluții ale sistemului omogen asociat, găsim sistemul

$$\sum_{i=1}^n C_i'(x)\mathbf{y}^{(i)}(x) = \mathbf{f}(x), \quad x \in [a, b], \quad (1.69)$$

care are forma matriceală

$$\Gamma(x) \cdot C'(x) = F(x), \quad x \in [a, b]. \quad (1.70)$$

Dar (1.69) este un sistem de n ecuații cu n necunoscute $C_i'(x), i = \overline{1, n}$.

Soluția acestui sistem se deduce din (1.70) prin înmulțirea la stânga cu inversa matricei $\Gamma(x)$. Se obține

$$C'(x) = \Gamma^{-1}(x) \cdot F(x). \quad (1.71)$$

⁴Lagrange, Joseph – Louis (17361813), matematician, mecanician și astronom, născut în Torino, provincia Piemont din Italia. A trăit o parte a vieții în Prusia și o alta în Franța. A adus contribuții semnificative în toate domeniile analizei matematice, teoriei numerelor, mecanicii clasice și mecanicii cerești. La recomandarea lui Euler și d'Alembert, în 1766 Lagrange i-a succedat lui Euler la conducerea secției de matematici a Academiei de Științe a Prusiei din Berlin, post în care a activat timp de 20 de ani efectuând un mare volum de muncă și câștigând câteva premii ale Academiei de Științe a Franței. Tratatul lui Lagrange asupra mecanicii analitice (Mecanică Analitică, a 4-a Ediție, 2 Volume, Editura Gauthier-Villars, Paris, 1888–1889), scris în Berlin și publicat prima dată în 1788, oferă cel mai cuprinzător studiu al mecanicii clasice de la Newton, constituind totodată fundamentul pentru dezvoltarea fizicii matematice din secolul 19. În 1787, la vârsta de 51 de ani, se mută de la Berlin în Franța, devine membru al Academiei de Științe a Franței și rămâne în Franța până la sfârșitul vieții. Prin urmare, Lagrange este considerat deopotrivă om de știință francez și italian. Lagrange a supraviețuit Revoluției din Franța și a devenit primul profesor de analiză matematică a Școlii Politehnice din Paris încă de la deschiderea sa din 1794. Napoleon i-a acordat lui Lagrange Legiunea de Onoare și l-a înobilat în 1808 cu titlul de Conte al Imperiului. Este înmormântat în Panteon și numele său apare printre cele 72 de personalități ale căror nume sunt inscripționate pe Turnul Eiffel.

Integrând ecuațiile diferențiale ordinare (1.71) se găsește

$$C(x) = K + \int_{x_0}^x \Gamma^{-1}(s) \cdot F(s) ds, \quad (1.72)$$

unde $K \in \mathcal{M}_{1 \times n}$ are elemente constante arbitrare.

Înlocuind (1.72) în (1.68), obținem soluția generală a sistemului neomogen (1.66)

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{e} \left(\Gamma(x) K + \int_{x_0}^x \Gamma(x) \cdot \Gamma^{-1}(s) F(s) ds \right), \quad (1.73)$$

unde F este matricea coordonatelor vectorului \mathbf{f} în baza canonică din \mathbb{R}^n .

Să mai observăm că (1.73) se scrie și în forma

$$\mathbf{y} = \mathbf{e} \left(\Gamma(x) K \right) + \mathbf{e} \left(\int_{x_0}^x \Gamma(x) \cdot \Gamma^{-1}(s) F(s) ds \right) = \mathbf{y}_o(x) + \mathbf{y}_p(x), \quad (1.74)$$

din care deducem că soluția generală a sistemului neomogen (1.66) este suma dintre soluția generală $\mathbf{y}_o(x)$ a sistemului omogen asociat $\mathbf{L}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ și o soluție particulară $\mathbf{y}_p(x)$ a sistemului neomogen.

O soluție particulară a sistemului neomogen (1.66) se obține prin metoda variației constantelor luând pentru K din (1.72) matricea coloană identic nulă.

1.5 Sisteme de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți

Să studiem sistemele de ecuații diferențiale liniare de ordinul întâi, neomogene și omogene, în care coeficienții din (1.42) sunt constante reale notate cu $-a_{ij}$.

Astfel de sisteme diferențiale le vom numi în continuare *sisteme diferențiale liniare*.

Forma generală a unui *sistem diferențial liniar, neomogen* este

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ \cdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + f_n(x), \end{cases} \quad (1.75)$$

în care f_1, f_2, \dots, f_n sunt funcții date, continue pe un compact $[a, b]$.

Dacă în (1.75) toate funcțiile f_i sunt identic nule, atunci sistemul diferențial liniar corespunzător

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n, \\ \cdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n, \end{cases} \quad (1.76)$$

este un *sistem omogen de ecuații diferențiale de ordinul întâi cu coeficienți constanți*, sau *sistem diferențial liniar și omogen cu coeficienți constanți*. Deoarece coeficienții acestui sistem coincid cu cei ai sistemului (1.75), sistemul diferențial se numește *asociatul* sistemului (1.75).

Forma matriceală a unui astfel de sistem omogen este

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}, \quad (1.77)$$

unde \mathbf{Y} este matricea cu o singură coloană cu elementele coordonate vectorului $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, iar \mathbf{A} este matricea pătratică de ordinul n a cărei elemente sunt coeficienții sistemului.

Toate rezultatele stabilite mai sus pentru sisteme de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți variabili, omogene și neomogene, sunt adevărate și pentru sistemele (1.75) și (1.76).

Vom determina soluția generală a sistemului omogen (1.76) folosind teoria valorilor și vectorilor proprii.

Pentru aceasta, căutăm soluții particulare ale sistemului (1.77) de forma

$$Y = \Gamma e^{rx}, \quad (1.78)$$

unde Γ este matricea coordonatelor vectorului nenul γ , deci $\gamma = \mathbf{e}\Gamma$, iar r este un număr real sau complex.

Vom determina γ și r din condiția ca $y = \mathbf{e}\Gamma e^{rx}$ să fie soluție a sistemului (1.76), a cărui formă vectorială este

$$y' = \mathbf{e}(AY). \quad (1.79)$$

Impunând condiția ca Y din (1.78) să verifice (1.77), găsim că Γ este soluția unui sistem liniar omogen a cărui formă matriceală este

$$(A - rE)\Gamma = O, \quad (1.80)$$

unde E este matricea unitate de ordinul n , iar O este matricea nulă.

Pentru ca sistemul algebric (1.80) să aibă soluții nebanale, determinantul acestuia trebuie să fie nul. Astfel, obținem ecuația algebrică de gradul n în necunoscuta r

$$\det(A - rE) = \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - r & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0, \quad (1.81)$$

numită *ecuație caracteristică* a sistemului diferențial (1.76).

Ecuațiile (1.81) și (1.80) arată că Γ din (1.78) este matricea coloană a vectorului propriu γ a matricei A , corespunzător valorii proprii r .

Dacă ecuația caracteristică (1.81) are toate cele n rădăcini reale și distincte, r_1, r_2, \dots, r_n , lor le corespund n vectori proprii γ_i , respectiv n soluții particulare ale sistemului neomogen (1.79)

$$y_1(x) = \gamma_1 e^{r_1 x}, \quad y_2(x) = \gamma_2 e^{r_2 x}, \quad \dots, \quad y_n(x) = \gamma_n e^{r_n x}. \quad (1.82)$$

Wronskianul soluțiilor (1.82) este produsul dintre $e^{(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn})x}$ și determinantul Vandermonde⁵ construit cu numerele r_1, r_2, \dots, r_n . Deoarece rădăcinile caracteristice sunt distincte, rezultă că wronskianul soluțiilor menționate în (1.82) este diferit de zero, fapt ce atrage concluzia că funcțiile (1.82) constituie un sistem fundamental de soluții pentru sistemul de ecuații diferențiale (1.76).

În acest caz, soluția generală a sistemului (1.76) este combinația liniară

$$y = C_1 \gamma_1 e^{r_1 x} + C_2 \gamma_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n \gamma_n e^{r_n x}, \quad (1.83)$$

în care C_1, C_2, \dots, C_n sunt constante arbitrare. Forma acestei soluții generale este

$$Y = C_1 \Gamma_1 e^{r_1 x} + C_2 \Gamma_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n \Gamma_n e^{r_n x}. \quad (1.84)$$

Teorema 1.5.1. *Dacă ecuația caracteristică are, de pildă, rădăcina r_1 multiplă de ordinul k , atunci partea din soluția generală corespunzătoare ei are forma*

$$\begin{pmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \\ \dots \\ P_n(x) \end{pmatrix} e^{r_1 x}, \quad (1.85)$$

⁵Vandermonde, Alexandre – Théophile (1735 - 1796), matematician, chimist și muzician francez ce a lucrat cu Bezout și Lavoisier; numele lui este în principal asociat cu teoria determinantilor din matematică.

unde $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ sunt polinoame de grad cel mult $k-1$, având coeficienții funcții liniare de k constante arbitrare C_1, C_2, \dots, C_k . Polinoamele $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ nu pot fi identic nule decât dacă toate constantele C_1, C_2, \dots, C_k sunt nule. A se vedea Exemplul 1.5.2.

Cazul rădăcinilor complexe poate fi tratat în mod analog. Vor rezulta soluții complex conjugate în perechi. Din fiecare astfel de pereche se construiesc alte două soluții reale luând semisuma acestora și semidiferența împărțită prin unitatea imaginară.

Pentru determinarea soluțiilor particulare ale sistemelor neomogene se poate folosi metoda variației constantelor a lui Lagrange. În cazul în care $f_i(x) = e^{\alpha x}(Q_i^1(x) \cos \beta x + Q_i^2(x) \sin \beta x)$, soluții particulare se pot obține prin metoda coeficienților nedeterminați, fără cuadraturi. Mai precis, se caută soluții particulare de forma termenului liber, adică de forma

$$y_i(x) = x^s e^{\alpha x} (R_i^1(x) \cos \beta x + R_i^2(x) \sin \beta x), \quad i = \overline{1, n},$$

unde R_i^1 și R_i^2 sunt polinoame de aceleași grade cu respectiv polinoamele Q_i^1 și Q_i^2 , iar s este multiplicitatea lui $r = \alpha + i\beta$ ca rădăcină a ecuației caracteristice.

Vom ilustra aceste afirmații prin exemple.

Exemplul 1.5.1. Să se determine soluția generală a sistemului diferențial omogen

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 2y_2 + 3y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2 + y_3, \\ y_3' = y_1 + 3y_2 - y_3. \end{cases}$$

Soluție. Sistemul de ecuații diferențiale dat este de ordinul întâi, omogen, cu coeficienți constanți și se poate scrie în forma matriceală

$$Y' = AY, \quad \text{unde} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}.$$

Pentru a determina soluția generală a sistemului, aplicăm metoda valorilor și vectorilor proprii.

Valorile proprii ale matricei A sunt rădăcinile ecuației caracteristice

$$\det(A - rE) = \begin{vmatrix} 2-r & -2 & 3 \\ 1 & 1-r & 1 \\ 1 & 3 & -1-r \end{vmatrix} = 0,$$

adică a ecuației $r^3 - 2r^2 - 5r + 6 = 0$. Rădăcinile acestei ecuații sunt $r_1 = 1, r_2 = 3, r_3 = -2$.

Deoarece valorile proprii sunt reale și distincte, vectorii proprii corespunzători sunt liniar independenți.

Vectorul propriu corespunzător valorii proprii r este o soluție nebanală a sistemului liniar și omogen

$$\begin{cases} (2-r)\gamma_1 & -2\gamma_2 & +3\gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 & +(1-r)\gamma_2 & +\gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 & +3\gamma_2 & +(-1-r)\gamma_3 = 0. \end{cases} \quad (1.86)$$

Cele trei sisteme corespunzătoare rădăcinilor caracteristice, obținute din (1.86) luând succesiv pentru r valorile $r_1 = 1$, $r_2 = 3$, $r_3 = -2$, sunt:

$$\begin{cases} \gamma_1 - 2\gamma_2 + 3\gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 + \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 + 3\gamma_2 - 2\gamma_3 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} -\gamma_1 - 2\gamma_2 + 3\gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 - 2\gamma_2 + \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 + 3\gamma_2 - 4\gamma_3 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 4\gamma_1 - 2\gamma_2 + 3\gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Corespunzător vectorilor proprii

$$\gamma^{(1)} = (-1, 1, 1), \quad \gamma^{(2)} = (1, 1, 1), \quad \gamma^{(3)} = (11, 1, -14).$$

avem următoarele soluții liniar independente ale sistemului

$$Y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x; \quad Y^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}; \quad Y^{(3)}(x) = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix} e^{-2x}$$

și prin urmare soluția generală a sistemului diferențial este

$$Y(x) = C_1 Y^{(1)}(x) + C_2 Y^{(2)}(x) + C_3 Y^{(3)}(x),$$

unde C_1, C_2, C_3 sunt constante arbitrare.

Egalând elementele corespunzătoare găsim soluția generală pe componente (coordonate)

$$\begin{cases} y_1(x) = -C_1 e^x + C_2 e^x + 11C_3 e^{-2x}, \\ y_2(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-2x}, \\ y_3(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - 14C_3 e^{-2x}. \end{cases} \quad (1.87)$$

Integrarea sistemului se poate efectua și prin **metoda eliminării**. ■

Exemplul 1.5.2. Să se afle soluția generală a sistemului liniar de ecuații diferențiale cu coeficienți constanți

$$\begin{cases} y'_1 = y_1 - y_2, \\ y'_2 = y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

Soluție. Matricea sistemului are ecuația caracteristică $r^2 - 4r + 4 = 0$ cu rădăcina dublă $r = 2$. Conform Teoremei 1.5.1, soluția generală a sistemului se caută sub forma

$$\begin{cases} y_1 = (A_1 x + C_1) e^{2x}, \\ y_2 = (A_2 x + C_2) e^{2x}. \end{cases}$$

Se găsește

$$\begin{cases} y_1 = ((C_1 + C_2)x + C_1) e^{2x}, \\ y_2 = (-(C_1 + C_2)x + C_2) e^{2x}, \end{cases}$$

sau, matriceal, $Y = C_1 Y^{(1)}(x) + C_2 Y^{(2)}(x)$, unde $Y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} x+1 \\ -x \end{pmatrix} e^{2x}$, $Y^{(2)} = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} e^{2x}$. ■

Exemplul 1.5.3. Determinați soluția generală a sistemului omogen

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 - y_3, \\ y_2' = 2y_1 - y_2 - 2y_3, \\ y_3' = -y_1 + y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

Soluție. Sistemul se poate scrie matriceal în forma $Y' = AY$, unde matricea sa $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

are valoarea proprie triplă $r = 1$. Conform Teoremei 1.5.1, soluția generală trebuie căutată sub forma

$$Y = \begin{pmatrix} A_1x^2 + B_1x + C_1 \\ A_2x^2 + B_2x + C_2 \\ A_3x^2 + B_3x + C_3 \end{pmatrix} e^x.$$

În cele din urmă se găsește că Y se scrie ca o combinație liniară de constantele C_1, C_2, C_3

$$Y = C_1 \begin{pmatrix} x+1 \\ 2x \\ -x \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} -x \\ 1-2x \\ x \end{pmatrix} e^x + C_3 \begin{pmatrix} -x \\ -2x \\ x+1 \end{pmatrix} e^x.$$

■

Exemplul 1.5.4. Să se integreze sistemul $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$

Soluție. Se aplică metoda valorilor și vectorilor proprii.

Valorile proprii sunt numerele complex conjugate $r_1 = 3 + i, r_2 = 3 - i$.

După determinarea vectorilor proprii corespunzători se găsesc soluțiile complex conjugate

$$\tilde{Y}^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(3+i)x}, \quad \tilde{Y}^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(3-i)x}.$$

Pornind de la acestea, determinăm alte două soluții liniar independente,

$$Y^{(1)}(x) = \frac{\tilde{Y}^{(1)}(x) + \tilde{Y}^{(2)}(x)}{2} = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} e^{3x}, \quad Y^{(2)}(x) = \frac{\tilde{Y}^{(1)}(x) - \tilde{Y}^{(2)}(x)}{2i} = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} e^{3x}.$$

Așadar, soluția generală a sistemului, scrisă matriceal, este

$$Y(x) = C_1 Y^{(1)}(x) + C_2 Y^{(2)}(x),$$

unde C_1 și C_2 sunt constante reale arbitrare.

■

Exemplul 1.5.5. Să se integreze sistemul $\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1 + 2y_2. \end{cases}$

Soluție. Valorile proprii ale matricei sistemului sunt $r_1 = r_2 = 1$.

Sistemul de ecuații care dă coordonatele vectorilor proprii se reduce la o singură ecuație $\gamma_1 - \gamma_2 = 0$. Toți vectorii proprii sunt de forma $\gamma = \lambda(1, 1)$, unde $\lambda \neq 0$. Deci, nu există doi vectori proprii liniar independenți.

Se caută atunci soluția generală a sistemului în forma

$$y_1(x) = (C_1 + C_2x)e^x, \quad y_2(x) = (D_1 + D_2x)e^x.$$

Găsim $y_1(x) = (C_1 + C_2x)e^x$, $y_2(x) = (C_1 + C_2 + C_2x)e^x$, unde C_1 și C_2 sunt constante reale arbitrare. ■

Exemplul 1.5.6. Să se determine soluția generală a sistemului

$$\begin{cases} y_1' = -3y_1 - 4y_2 + 2x, \\ y_2' = y_1 + y_2 + x \end{cases}$$

și să se rezolve problema lui Cauchy cu condițiile inițiale $y_1(0) = 15$ și $y_2(0) = -8$.

Soluție. Avem de integrat un sistem de ecuații diferențiale cu coeficienți constanți neomogen, termenii liberi fiind polinoame de gradul întâi.

Determinăm întâi soluția generală a sistemului omogen asociat

$$\begin{cases} y_1' = -3y_1 - 4y_2, \\ y_2' = y_1 + y_2. \end{cases}$$

Pentru aceasta, procedăm ca în exemplul precedent și găsim $\begin{cases} y_1^{(o)}(x) = (-2C_1 + C_2 - 2C_2x)e^{-x}, \\ y_2^{(o)}(x) = (C_1 + C_2x)e^{-x}. \end{cases}$

Determinăm o soluție particulară a sistemului neomogen de forma membrului drept. Deoarece $r = 0$ nu este rădăcină caracteristică a sistemului omogen asociat, se caută o soluție particulară de forma

$$y_1^p(x) = A_1x + B_1, \quad y_2^p(x) = A_2x + B_2.$$

Se găsește $A_1 = -6, A_2 = 5, B_1 = 14, B_2 = -9$.

Deoarece soluția generală a sistemului dat este suma dintre soluția generală a sistemului omogen asociat și soluția particulară determinată, avem

$$\begin{cases} y_1(x) = y_1^{(o)}(x) + y_1^p(x) = (-2C_1 + C_2 - 2C_2x)e^{-x} - 6x + 14, \\ y_2(x) = y_2^{(o)}(x) + y_2^p(x) = (C_1 + C_2x)e^{-x} + 5x - 9. \end{cases}$$

Impunând soluției generale satisfacerea condițiilor inițiale, găsim că valorile constantelor C_1 și C_2 sunt 1 și respectiv 3. Prin urmare, soluția problemei lui Cauchy este

$$\begin{cases} y_1(x) = (1 - 6x)e^{-x} - 6x + 14, \\ y_2(x) = (3x + 1)e^{-x} + 5x - 9. \end{cases}$$

■

Capitolul 2

Ecuatii cu derivate parțiale de ordinul întâi

2.1 Ecuatii liniare cu derivate parțiale de ordinul întâi

2.1.1 Definiții. Suprafețe integrale

Definiția 2.1.1. O relație de forma

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \quad (2.1)$$

unde F este o funcție reală continuă de $2n + 1$ variabile reale definită pe un domeniu $\Delta \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, se numește **ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi**, dacă se cere să se determine funcția

$$u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.2)$$

cu derivate parțiale de ordinul întâi continue într-un domeniu $D \subset \mathbb{R}^n$, astfel încât să avem

$$F\left(\mathbf{x}; \varphi(\mathbf{x}), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right) \equiv 0 \quad (2.3)$$

pentru orice $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$.

În cele ce urmează, $\mathcal{F}(D)$ reprezintă spațiul liniar al funcțiilor reale definite pe domeniul $D \subset \mathbb{R}^n$.

Definiția 2.1.2. Funcția $\varphi \in \mathcal{F}(D)$ din (2.2) care satisface condiția (2.3) se numește **soluție sau suprafață integrală** a ecuației (2.1).

Definiția 2.1.3. Ecuația cu derivate parțiale de ordinul întâi de forma

$$X_1(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_n(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \quad (2.4)$$

se numește **ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi, liniară și omogenă**.

Forma (2.4) arată că ecuația depinde liniar de derivatele parțiale ale funcției necunoscute u , iar coeficienții X_k sunt funcții doar de variabila vectorială \mathbf{x} , adică de variabilele independente x_1, x_2, \dots, x_n . În plus, vom

presupune că funcțiile X_k sunt de clasă $C^1(D)$ și nu se anulează simultan în D , ceea ce înseamnă că are loc inegalitatea

$$X_1^2(\mathbf{x}) + X_2^2(\mathbf{x}) + \cdots + X_n^2(\mathbf{x}) > 0, \quad (\forall) \mathbf{x} \in D. \quad (2.5)$$

2.1.2 Sistem caracteristic. Curbe caracteristice

Considerăm ecuația liniară (2.4) în care funcțiile $X_k \in C^1(D)$ satisfac în D condiția (2.5).

Definiția 2.1.4. *Sistemul simetric definit în D*

$$\frac{dx_1}{X_1(\mathbf{x})} = \frac{dx_2}{X_2(\mathbf{x})} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n(\mathbf{x})} \quad (2.6)$$

se numește **sistemul caracteristic asociat** ecuației cu derivate parțiale (2.4).

Definiția 2.1.5. *Curbele integrale ale sistemului (2.6) se numesc **curbe caracteristice** ale ecuației cu derivate parțiale liniară și omogenă (2.4).*

În ipoteza că x_n este variabilă independentă, din paragraful 1.2 rezultă că soluția generală a sistemului caracteristic (2.6) este

$$x_i = \varphi_i(x_n, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2.7)$$

sau, rezolvând în raport cu constantele arbitrare C_1, C_2, \dots, C_{n-1} ,

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_2, \\ \dots \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_{n-1}, \end{cases} \quad (2.8)$$

unde $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ sunt funcții continue cu derivate parțiale continue în D .

Oricare din relațiile (2.8) se numește *integrală primă* a sistemului caracteristic (2.6), iar ansamblul (2.8) reprezintă o familie de curbe integrale, sau o familie de curbe caracteristice ale ecuației (2.4).

Vom vedea că integrarea ecuației (2.4) este strâns legată de integrarea sistemului caracteristic asociat (2.6). Această legătură este dată de teorema următoare.

Teorema 2.1.1. *Dacă relația*

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = C \quad (2.9)$$

este o integrală primă a sistemului caracteristic (2.6), atunci funcția reală de n variabile reale definită pe D

$$u = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.10)$$

este o soluție a ecuației cu derivate parțiale (2.4).

Demonstrație. Folosind Teorema 1.2.1, rezultă că dacă (2.9) este o integrală primă a sistemului caracteristic (2.6), atunci de-a lungul unei curbe caracteristice avem

$$X_1(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \cdots + X_n(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_n} = 0. \quad (2.11)$$

Egalitatea (2.11) fiind adevărată pentru orice constantă C , este adevărată pentru orice curbă integrală situată în D , de unde rezultă că este adevărată pentru orice $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$; prin urmare (2.10) este o soluție a ecuației (2.4) în D . **q.e.d.**

2.1.3 Soluția generală

Teorema 2.1.2. Dacă $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ sunt integrale prime ale sistemului caracteristic (2.6), independente funcțional pe mulțimea $D' \subset D$, și

$$\Phi(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$$

este o funcție oarecare cu derivate parțiale continue într-un domeniu $\Delta \subset \mathbb{R}^{n-1}$, atunci funcția $\mathbf{x} \mapsto u(\mathbf{x})$, unde

$$u(\mathbf{x}) = \Phi(\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \dots, \psi_{n-1}(\mathbf{x})), \quad (2.12)$$

este o soluție a ecuației cu derivate parțiale (2.4) în D' .

Demonstrație. În prima etapă arătăm că funcția $u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$ verifică ecuația (2.4). Pentru aceasta trebuie să calculăm derivatele parțiale de ordinul întâi ale acestei funcții. Aplicând regula de derivare a funcțiilor compuse, avem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial v_2} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial v_{n-1}} \cdot \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial v_2} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial v_{n-1}} \cdot \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_2}, \\ \dots, \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial v_2} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial v_{n-1}} \cdot \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Dacă în relația de ordin j din (2.13) înmulțim cu X_j , unde $j \in \{1, 2, \dots, (n-1)\}$, și adunăm pe coloane, obținem

$$\sum_{i=1}^n X_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial v_j} \left(\sum_{k=1}^n X_k \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial x_k} \right) \quad (2.14)$$

Însă, în (2.14) fiecare paranteză din partea dreaptă este nulă deoarece, conform Teoremei 2.1.1, funcțiile $\psi_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $j = \overline{1, n-1}$, sunt soluții ale ecuației cu derivate parțiale (2.4). Rezultă că funcția u din (2.12) este soluție a ecuației (2.4).

Reciproc, orice soluție $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a ecuației (2.4) este de forma (2.12).

Într-adevăr, $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fiind soluție a ecuației (2.4), avem

$$X_1(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_n(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \quad (2.15)$$

Pe lângă aceasta, avem și relațiile

$$X_1(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi_j}{\partial x_1} + X_2(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi_j}{\partial x_2} + \dots + X_n(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi_j}{\partial x_n} = 0, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad (2.16)$$

care exprimă că integralele prime $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ sunt soluții ale ecuației cu derivate parțiale de ordinul întâi (2.4).

Pentru orice punct fixat $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D$, ecuațiile (2.15) și (2.16) formează un sistem de n ecuații liniare și omogene în necunoscutele X_1, X_2, \dots, X_n . Datorită condiției (2.5), acest sistem are și soluții nebanale.

Conform teoremei lui Rouché¹, determinantul sistemului

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{D(u, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (2.17)$$

trebuie să fie nul pentru orice $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D$. Așadar, putem scrie

$$\frac{D(u, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)} = 0, \quad (\forall) \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D.$$

Deoarece $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ sunt integrale prime independente funcțional în D , există domeniul $D' \subset D$ în care matricea jacobiană $J_{\psi}(\mathbf{x})$, unde $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$, are rangul $n-1$. Aceasta înseamnă că cel puțin un minor de ordinul $n-1$ al matricei este nenul pe D' . Fie că acest minor este determinantul funcțional

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1})} \neq 0, \quad (\forall) \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D. \quad (2.18)$$

Folosind rezultatele de la dependență și independență funcțională a funcțiilor, rezultă că funcția u depinde funcțional pe $D'' \subset D'$ de funcțiile $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$. Prin urmare, putem scrie $u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$. **q.e.d.**

Definiția 2.1.6. Funcția u din (2.12), unde Φ este o funcție arbitrară definită pe un domeniu din spațiul \mathbb{R}^{n-1} , se numește **soluția generală** a ecuației cu derivate parțiale liniare și omogenă (2.4).

Exercițiul 2.1.1. Să se integreze următoarele ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi omogene

$$\begin{aligned} 1. \quad (x+2y) \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} &= 0; & 2. \quad y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} &= 0; \\ 3. \quad x(2x^3 - y^3) \frac{\partial z}{\partial x} + y(x^3 - 2y^3) \frac{\partial z}{\partial y} &= 0; & 4. \quad 2\sqrt{x} \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Soluție. Sistemele caracteristice corespunzătoare ale acestor ecuații sunt:

$$1. \quad \frac{dx}{x+2y} = \frac{dy}{-y}; \quad 2. \quad \frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}; \quad 3. \quad \frac{dx}{x(2x^3 - y^3)} = \frac{dy}{y(x^3 - 2y^3)}; \quad 4. \quad \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{dy}{-y}.$$

¹Rouché, Eugène (1832 – 1910), matematician francez. În 1896 a fost ales membru al Academiei de Științe din Franța.

Aceste sisteme caracteristice sunt echivalente respectiv cu ecuațiile diferențiale ordinare

$$\begin{array}{ll} 1. & \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x+2y}; \quad 2. & \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}; \\ 3. & \frac{dy}{dx} = \frac{y(x^3-2y^3)}{x(2x^3-y^3)}; \quad 4. & \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{2\sqrt{x}}. \end{array}$$

Prima și a treia ecuație diferențială de ordinul întâi este omogenă și se integrează utilizând substituția $\frac{y}{x} = u$, unde noua funcție necunoscută este u , ce depinde de x , iar celelalte două ecuații sunt cu variabile separabile. Soluțiile acestor ecuații diferențiale ordinare sunt:

$$1. y(x+y) = C; \quad 2. x^2 + y^2 = C; \quad 3. \frac{x^3 + y^3}{x^2 y^2} = C; \quad 4. \sqrt{x} + \ln y = C.$$

Fiecare din relațiile de mai sus reprezintă o integrală primă pentru ecuația cu derivate parțiale de ordinul întâi omogenă corespunzătoare.

Soluția generală a unei ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi omogenă este o funcție arbitrară de $n-1$ integrale prime independente. Cum pentru toate aceste exerciții n este 2, la fiecare avem nevoie doar de câte o integrală primă și le vom considera pe cele deduse mai sus. Prin urmare, soluțiile ecuațiilor date sunt respectiv

$$\begin{array}{ll} 1. & z = \psi(y(x+y)); \quad 2. & z = \psi(x^2 + y^2); \\ 3. & z = \psi\left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 y^2}\right); \quad 4. & z = \psi(\sqrt{x} + \ln y), \end{array}$$

unde ψ este o funcție oarecare de clasă $C^1(I)$ și I un interval real. ■

Exercițiul 2.1.2. Să se determine soluțiile generale ale următoarelor ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi omogene

$$\begin{array}{l} 1. \quad (az - by)\frac{\partial u}{\partial x} + (bx - cz)\frac{\partial u}{\partial y} + (cy - ax)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}; \\ 2. \quad (x - a)\frac{\partial u}{\partial x} + (y - b)\frac{\partial u}{\partial y} + (z - c)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}; \\ 3. \quad xz\frac{\partial u}{\partial x} - yz\frac{\partial u}{\partial y} + (x^2 - y^2)\frac{\partial u}{\partial z} = 0; \\ 4. \quad (x - y + z)\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0; \\ 5. \quad xy\frac{\partial w}{\partial x} - y^2\frac{\partial w}{\partial y} + z^2\frac{\partial w}{\partial z} = 0; \\ 6. \quad x^2\frac{\partial F}{\partial x} - xy\frac{\partial F}{\partial y} + y^2\frac{\partial F}{\partial z} = 0; \\ 7. \quad \sqrt{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \sqrt{z}\frac{\partial u}{\partial z} = 0; \\ 8. \quad 2 \cosh x \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \sinh x \frac{\partial u}{\partial y} - z \sinh x \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \end{array}$$

Soluție. Sistemele caracteristice corespunzătoare ecuațiilor de mai sus sunt:

1. $\frac{dx}{az - by} = \frac{dy}{bx - cz} = \frac{dz}{cy - ax};$
2. $\frac{dx}{x - a} = \frac{dy}{y - b} = \frac{dz}{z - c};$
3. $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{-yz} = \frac{dz}{x^2 - y^2};$
4. $\frac{dx}{x - y + z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z};$
5. $\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-y^2} = \frac{dz}{z^2};$
6. $\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{-xy} = \frac{dz}{y^2};$
7. $\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dz}{\sqrt{z}};$
8. $\frac{dx}{2 \cosh x} = \frac{dy}{2 \sinh x} = \frac{dz}{-z \sinh x}.$

Vom căuta combinații integrabile ale rapoartelor egale.

1. Prin înmulțirea celor trei rapoarte cu respectiv x, y și z și adunarea numărătorilor și a numitorilor, obținem un nou raport care are numitorul egal cu zero, iar numărătorul este diferențiala expresiei $x^2 + y^2 + z^2$. Rezultă că și numărătorul trebuie să fie zero și prin urmare $x^2 + y^2 + z^2 = C_1$ este prima integrală primă a sistemului caracteristic corespunzător primei ecuații.

Înmulțind acum rapoartele cu c, a și b și adunând iarăși numărătorii și numitorii între ei, obținem din nou zero la numitor. Prin urmare $cx + ay + bz = C_2$ este a doua integrală primă.

$$2. \begin{cases} \frac{dx}{x - a} = \frac{dy}{y - b} & \Rightarrow \frac{x - a}{y - b} = C_1, \\ \frac{dy}{y - b} = \frac{dz}{z - c} & \Rightarrow \frac{y - b}{z - c} = C_2. \end{cases}$$

3. Considerăm primele două rapoarte. După simplificare prin z se obține combinația integrabilă $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y}$ care conduce la integrala primă $xy = C_1$.

A doua integrală primă se obține după ce adunăm numărătorii și numitorii din primele două rapoarte, raportul găsit egalându-l cu al treilea. Avem $\frac{d(x + y)}{z(x - y)} = \frac{dz}{x^2 - y^2}$, de unde, după simplificare cu $x - y$, se obține combinația integrabilă

$$(x + y)d(x + y) = z dz$$

care conduce la integrala primă $(x + y)^2 - z^2 = C_2$.

4. Integrând $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$ obținem integrala primă $\psi_1(x, y, z) = \frac{y}{z}$.

Pentru a obține a doua integrală primă pornim de la egalitatea

$$\frac{dx}{x - y + z} = \frac{d(y - z)}{y - z},$$

dedusă folosind o proprietate a rapoartelor egale. Notând $y - z = u$, se ajunge la ecuația liniară de ordinul întâi neomogenă $\frac{dx}{du} - \frac{1}{u}x = -1$ care are soluția $x = u(C_2 - \ln u)$. Revenind la variabilele x, y, z se obține a doua integrală primă $\frac{x}{y - z} + \ln(y - z) = C_2$.

5. Cele două integrale prime independente funcțional se obțin considerând primele două rapoarte și respectiv ultimele două. Se obține:

$$xy = C_1; \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = C_2.$$

6. O integrală primă se găsește prin considerarea primelor două rapoarte. După simplificare cu x și apoi integrare, se obține $xy = C_1$.

Pentru cea de a doua integrală primă vom folosi integrala primă găsită.

Din ultimele două rapoarte se obține $y dy = -x dz$ care, după înmulțire cu y și folosirea integralei prime deja găsită, se obține $\frac{1}{3}y^3 + C_1z = C_2$. Înlocuind $C_1 = xy$ avem că cea de a doua integrală primă este

$$\frac{1}{3}y^3 + xyz = C_2.$$

7. Cele două combinații integrabile le vom determina considerând primele două rapoarte și apoi ultimele două. Integrând, obținem:

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = C_1; \quad \sqrt{y} - \sqrt{z} = C_2.$$

8. O combinație integrabilă este $\frac{dx}{2 \cosh x} = \frac{dy}{2 \sinh x}$ din care rezultă integrala primă $y - \ln \cosh x = C_1$.

A doua integrală primă se obține dacă se consideră ultimele două rapoarte după care se simplifică prin $\sinh x$. Integrând în ambii membri, avem $z^2 e^y = C_2$.

Astfel, soluțiile generale ale ecuațiilor cu derivate parțiale din enunț sunt:

$$1. \quad u(x, y, z) = \Phi(x^2 + y^2 + z^2, cx + ay + bz);$$

$$2. \quad u(x, y, z) = \Phi\left(\frac{x-a}{y-b}, \frac{y-b}{z-c}\right);$$

$$3. \quad u(x, y, z) = \Phi(xy, (x+y)^2 - z^2);$$

$$4. \quad u(x, y, z) = \Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y-z} + \ln(y-z)\right);$$

$$5. \quad u(x, y, z) = \Phi\left(xy, \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right);$$

$$6. \quad u(x, y, z) = \Phi\left(xy, \frac{1}{3}y^3 + xyz\right);$$

$$7. \quad u(x, y, z) = \Phi(\sqrt{x} - \sqrt{y}, \sqrt{y} - \sqrt{z});$$

$$8. \quad u(x, y, z) = \Phi(y - \ln \cosh x, z^2 e^y),$$

unde Φ este o funcție arbitrară de integralele prime menționate. ■

2.1.4 Problema lui Cauchy

În general, în problemele practice, nu interesează soluții arbitrare ale ecuației (2.4), ci acele soluții care să îndeplinească anumite condiții inițiale.

Definiția 2.1.7. Problema determinării în domeniul $D \subset \mathbb{R}^n$ a acelei soluții $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a ecuației cu derivate parțiale liniare și omogene (2.4) care pentru $x_n = x_n^0$ se reduce la o funcție dată $\psi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in C^1(D')$, unde $D' \subset \mathbb{R}^{n-1}$, adică

$$u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = \psi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \quad (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in D', \quad (2.19)$$

se numește **problema lui Cauchy** pentru ecuația (2.4).

În anumite condiții impuse funcțiilor X_k și ψ soluția problemei Cauchy există și este unică.

În cele ce urmează ne vom ocupa de determinarea efectivă a soluției problemei lui Cauchy.

Această soluție va fi de forma (2.12) și problema se reduce la a determina funcția Φ , deci de a determina legătura între integralele prime $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$.

Fie o vecinătate a punctului $M_0(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^0)$, inclusă în D , în care determinantul funcțional (2.18) este diferit de zero. O asemenea vecinătate există în baza faptului că funcțiile ψ_k , $k = \overline{1, n-1}$, sunt continue și au derivate parțiale continue pe D . Dacă în (2.8) punem $x_n = x_n^0$, obținem sistemul

$$\psi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = C_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2.20)$$

care, rezolvat în raport cu x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , conduce la

$$x_j = \omega_j(C_1, C_2, \dots, C_{n-1}), \quad j = \overline{1, n-1}. \quad (2.21)$$

Putem enunța acum următoarea teoremă.

Teorema 2.1.3. Soluția problemei lui Cauchy pentru ecuația (2.4) cu condiția inițială (2.19) este dată de

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}), \omega_2(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})),$$

unde $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ sunt $n-1$ integrale prime independente funcțional ale sistemului caracteristic (2.6).

Demonstrație. Trebuie să arătăm că funcția u din enunțul teoremei este soluție a ecuației cu derivate parțiale (2.4), apoi să verificăm condiția inițială (2.19).

Faptul că u este soluție a ecuației (2.4) rezultă imediat din faptul că u este de forma $\Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$ după cum rezultă din expresia ei.

Soluția verifică condiția inițială în vecinătatea U a punctului M_0 . În adevăr pentru $x_n = x_n^0$, conform relațiilor (2.20) și (2.21), rezultă că (2.19) este îndeplinită. Din modul cum este construită funcția u rezultă și unicitatea ei. **q.e.d.**

Exercițiul 2.1.3. Să se rezolve problema lui Cauchy pentru ecuațiile cu derivate parțiale liniare și omogene

$$1. \quad 2x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} + z^3 \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

$$2. \quad zux + (x-z)^2 \frac{\partial u}{\partial y} + x \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

cu condițiile inițiale date respectiv de: 1. $u(x, y, 1) = x + y$; 2. $u(x, 0, z) = 2z(z - x)$.

Soluție. Sistemele caracteristice corespunzătoare

$$1. \quad \frac{dx}{2x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z^3}, \quad 2. \quad \frac{dx}{z} = \frac{dy}{(x-z)^2} = \frac{dz}{x}$$

au integralele prime

$$1. \begin{cases} \psi_1(x, y, z) = xy^2, \\ \psi_2(x, y, z) = \frac{1}{z^2} + \ln x, \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \psi_1(x, y, z) = x^2 - z^2 \\ \psi_2(x, y, z) = 2y + (x - z)^2. \end{cases}$$

Sistemul (2.20), în cazul acestor ecuații cu derivate parțiale, devine respectiv

$$1. \begin{cases} xy^2 = C_1 \\ 1 + \ln x = C_2 \end{cases}, \quad 2. \begin{cases} x^2 - z^2 = C_1, \\ (x - z)^2 = C_2. \end{cases}$$

Rezolvând aceste sisteme, găsim

$$1. \begin{cases} x = e^{C_2-1} = \omega_1(C_1, C_2) \\ y = \sqrt{\frac{C_1}{e^{C_2-1}}} = \omega_2(C_1, C_2) \end{cases}, \quad 2. \begin{cases} x = \frac{C_1 + C_2}{2\sqrt{C_2}} = \omega_1(C_1, C_2), \\ z = \frac{C_1 - C_2}{2\sqrt{C_2}} = \omega_2(C_1, C_2). \end{cases}$$

Conform Teoremei 2.1.3, avem că soluția problemei lui Cauchy este

$$u(x, y, z) = \psi(\omega_1(\psi_1, \psi_2), \omega_2(\psi_1, \psi_2)).$$

Deoarece expresiile funcției ψ sunt respectiv

$$1. \quad \psi(x, y) = x + y, \quad 2. \quad \psi(x, z) = 2z(z - x),$$

rezultă că soluțiile problemei lui Cauchy pentru cele două ecuații cu derivate parțiale sunt

$$1. \quad u(x, y, z) = \omega_1(\psi_1, \psi_2) + \omega_2(\psi_1, \psi_2) \\ 2. \quad u(x, y, z) = 2\omega_2(\psi_1, \psi_2) \left(\omega_2(\psi_1, \psi_2) - \omega_1(\psi_1, \psi_2) \right).$$

Efectuând calculele, găsim

$$1. \quad u(x, y, z) = e^{\psi_2(x, y, z)-1} + \sqrt{\frac{\psi_1(x, y, z)}{e^{\psi_2(x, y, z)-1}}} \\ 2. \quad u(x, y, z) = \psi_2(x, y, z) - \psi_1(x, y, z).$$

Înlocuind pe ψ_1 și ψ_2 , obținem $u(x, y, z) = xe^{z^{-2}-1} + y\sqrt{e^{1-z^{-2}}}$ și respectiv $u(x, y, z) = 2y + 2z^2 - 2xz$. ■

2.2 Ecuatii cu derivate parțiale de ordinul întâi, cuasiliniare

Definiția 2.2.1. O ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi de forma

$$X_1(\mathbf{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(\mathbf{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + X_n(\mathbf{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = X_{n+1}(\mathbf{x}, u) \quad (2.22)$$

se numește **ecuație cuasiliniară neomogenă**.

O astfel de ecuație este liniară în raport cu derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției necunoscute u care depinde de variabilele x_1, x_2, \dots, x_n (de variabila vectorială $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$), iar coeficienții X_k sunt funcții atât de variabila vectorială independentă \mathbf{x} cât și de funcția u .

Vom presupune că funcțiile X_k , $k = 1, 2, \dots, n$, sunt continue pe domeniul $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, au derivate parțiale continue în D și

$$\sum_{k=1}^n X_k^2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) > 0, \quad (\forall) (x_1, x_2, \dots, x_n, u) \in D.$$

2.2.1 Soluția generală

Teorema 2.2.1. Integrarea ecuației cu derivate parțiale (2.22) se reduce la integrarea ecuației cu derivate parțiale liniară cu $n + 1$ variabile

$$X_1(\mathbf{x}, u) \frac{\partial V}{\partial x_1} + X_2(\mathbf{x}, u) \frac{\partial V}{\partial x_2} + \cdots + X_n(\mathbf{x}, u) \frac{\partial V}{\partial x_n} + X_{n+1}(\mathbf{x}, u) \frac{\partial V}{\partial u} = 0.$$

Demonstrație. Să căutăm pentru ecuația cuasiliniară (2.22) o soluție u , definită implicit de ecuația

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0, \quad (2.23)$$

V fiind o funcție necunoscută ce urmează să o determinăm. În ipoteza că V este continuă și are derivate parțiale continue, cu derivata parțială în raport cu u diferită de zero în interiorul lui D , din (2.23) și teorema de existență și unicitate a funcțiilor reale de n variabile reale definite implicit de o ecuație în $n + 1$ necunoscute, obținem

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_1}}{\frac{\partial V}{\partial u}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_2}}{\frac{\partial V}{\partial u}}, \quad \dots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_n}}{\frac{\partial V}{\partial u}},$$

pe care le înlocuim în ecuația (2.22). În acest fel ajungem la

$$X_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + X_{n+1} \frac{\partial V}{\partial u} = 0, \quad (2.24)$$

care este o ecuație liniară și omogenă în necunoscuta V . Fie

$$\psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = C_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (2.25)$$

n integrale prime independente ale ecuației (2.24). Soluția generală a ecuației (2.24) este

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = \Phi(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}), \quad (2.26)$$

iar ecuația $V(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0$ definește implicit soluția ecuației cuasiliniare (2.22) în forma $u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Conform Teoremei 2.2.1, urmează că trebuie să determinăm n integrale prime ale sistemului caracteristic

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du}{X_{n+1}},$$

atașat ecuației (2.24), anume

$$\begin{cases} \psi_0(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = C_0, \\ \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = C_1, \\ \dots, \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = C_{n-1}. \end{cases} \quad (2.27)$$

Atunci, soluția generală a ecuației (2.22) este funcția definită implicit de

$$\Phi(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) = 0, \quad (2.28)$$

Φ fiind o funcție arbitrară derivabilă și cu derivate parțiale de ordinul întâi continue.

q.e.d.

Exercițiul 2.2.1. Să se determine integrala generală a ecuației cuasiliniare

$$xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 y \frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 + y^2)z.$$

Soluție. Sistemul caracteristic asociat acestei ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi este

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2 y} = \frac{dz}{(x^2 + y^2)z}.$$

Din primele două rapoarte obținem ecuația $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$ care ne conduce la integrala primă $x^2 - y^2 = C_0$.

O a doua integrală primă se obține din combinația

$$\frac{ydx + xdy}{xy^3 + x^3 y} = \frac{dz}{(x^2 + y^2)z}.$$

Primul raport al acestei combinații se obține din primele două rapoarte ale sistemului caracteristic prin înmulțirea lor cu x , respectiv y , urmată de adunarea lor. Se obține un nou raport egal cu celelalte rapoarte ale sistemului caracteristic. După înmulțirea cu $x^2 + y^2$ se obține

$$\frac{d(xy)}{xy} = \frac{dz}{z},$$

iar de aici rezultă a doua integrală primă $\frac{z}{xy} = C_1$.

Conform Teoremei 2.2.1, soluția generală a ecuației date este funcția $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuația $\Phi(\psi_1, \psi_2) = 0$, unde Φ este o funcție arbitrară. Având în vedere expresiile lui ψ_1 și ψ_2 , avem că soluția generală a ecuației cu derivate parțiale cuasiliniară este funcția $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuația

$$\Phi(x^2 - y^2, \frac{z}{xy}) = 0.$$

Soluția generală se poate scrie în forma $z = xy\Psi(x^2 - y^2)$, unde Ψ este o funcție reală arbitrară de o variabilă reală, derivabilă și cu derivată continuă. ■

Exercițiul 2.2.2. Să se integreze ecuația cuasiliniară

$$x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = z + \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{z}.$$

Soluție. Sistemul caracteristic asociat acestei ecuații este

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \cdots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{zdz}{z^2 + x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Se observă că avem următoarele combinații integrabile:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2}, \quad \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_3}{x_3}, \quad \dots, \quad \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_n}{x_n}$$

și

$$\frac{d(x_1 x_2 \cdots x_n)}{n x_1 x_2 \cdots x_n} = \frac{zdz}{z^2 + x_1 x_2 \cdots x_n}. \quad (2.29)$$

Din integrarea primelor $n - 1$ combinații integrabile obținem integralele prime

$$\frac{x_2}{x_1} = C_1, \quad \frac{x_3}{x_1} = C_2, \quad \dots \quad \frac{x_n}{x_1} = C_{n-1}.$$

Pentru a integra ultima combinație integrabilă notăm:

$$x_1 x_2 \cdots x_n = v; \quad z^2 = u.$$

Astfel, combinația integrabilă (2.29) se reduce la

$$\frac{du}{dv} - \frac{2}{nv} u = \frac{2}{n}.$$

Aceasta este o ecuație diferențială de ordinul întâi liniară și neomogenă și integrala ei generală este

$$u = C_n \sqrt[n]{v^2} + \frac{2v}{n-2}$$

sau, dacă revenim la vechile variabile,

$$(n-2)z^2 = C_n(n-2) \sqrt[n]{(x_1 x_2 \cdots x_n)^2} + 2x_1 x_2 \cdots x_n.$$

Integrala generală a ecuației date este funcția z definită implicit de

$$(n-2)z^2 = 2x_1 x_2 \cdots x_n + (n-2) \sqrt[n]{(x_1 x_2 \cdots x_n)^2} \Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right),$$

unde Φ este o funcție diferențiabilă arbitrară. ■

Exercițiul 2.2.3. Să se determine soluția generală a ecuației

$$(xy^3 - 2x^4) \frac{\partial z}{\partial x} + (2y^4 - x^3 y) \frac{\partial z}{\partial y} = 9z(x^3 - y^3).$$

Soluție. Sistemul caracteristic asociat ecuației este

$$\frac{dx}{x(y^3 - 2x^3)} = \frac{dy}{y(2y^3 - x^3)} = \frac{dz}{9z(x^3 - y^3)}.$$

Considerând primele două rapoarte se obține o ecuație diferențială omogenă care integrată conduce la integrala primă

$$\frac{y^3 + x^3}{y^2 x^2} = C_0.$$

O a doua integrală primă se obține din combinația integrabilă

$$\frac{ydx + xdy}{3xy^4 - 3x^4 y} = \frac{dz}{9z(x^3 - y^3)}.$$

Simplificând, obținem ecuația cu variabile separate $\frac{d(xy)}{xy} + \frac{dz}{3z} = 0$, care prin integrare conduce la a doua integrală primă $x^3 y^3 z = C_1$.

Soluția generală a ecuației este

$$z = \frac{1}{x^3 y^3} \Phi\left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 y^2}\right),$$

unde Φ este o funcție derivabilă arbitrară. ■

2.2.2 Problema lui Cauchy

Fie ecuația cu derivate parțiale cuasilineară (2.22) și punctul arbitrar, dar fixat, $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, u_0) \in D$.

Definiția 2.2.2. Problema determinării unei soluții u a ecuației (2.22) într-o vecinătate U a punctului $M_0 \in D$, care pentru $x_n = x_{n0}$ să se reducă la funcția continuă și cu derivate parțiale continue $\psi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, adică

$$u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}) = \psi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \quad (2.30)$$

se numește **problema lui Cauchy** a ecuației (2.22).

Pentru rezolvarea problemei lui Cauchy vom considera că s-au determinat n integrale prime independente funcțional într-o vecinătate a lui M_0 , iar dacă presupunem că aceste integrale prime sunt cele din (2.27), ele vor fi independente dacă

$$\frac{D(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u)} \Big|_{M_0} \neq 0. \quad (2.31)$$

Vom cere ca soluția căutată $u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ să treacă prin punctul M_0 , deci $u_0 = \varphi(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$. Funcția u , după cum am arătat la aliniatul precedent, este definită implicit de ecuația

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = \Phi(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) = 0$$

și problema se reduce la determinarea funcției Φ , adică a legăturii între integralele prime (2.27). În același timp, u trebuie să fie unic determinată într-o vecinătate a punctului M_0 , deci

$$\frac{\partial V}{\partial u}(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, u_0) \neq 0.$$

Fie W o vecinătate a punctului M_0 în care sistemul (2.27) se poate inversa în funcție de $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u$. Vom face însă inversarea după ce vom înlocui pe x_n cu x_{n0} , obținând astfel sistemul

$$\begin{cases} \psi_0(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}, u) = C_0, \\ \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}, u) = C_1, \\ \dots, \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}, u) = C_{n-1}. \end{cases} \quad (2.32)$$

Prin rezolvarea sistemului (2.32) în privința variabilelor menționate, găsim

$$\begin{cases} u = \omega_0(C_0, C_1, \dots, C_{n-1}), \\ x_1 = \omega_1(C_0, C_1, \dots, C_{n-1}), \\ \dots, \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(C_0, C_1, \dots, C_{n-1}). \end{cases} \quad (2.33)$$

Teorema 2.2.2. Soluția problemei lui Cauchy pentru ecuația (2.22) care îndeplinește condiția inițială (2.30) este funcția u definită implicit de ecuația

$$\omega_0(\psi_0, \dots, \psi_{n-1}) - \psi[\omega_1(\psi_0, \dots, \psi_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(\psi_0, \dots, \psi_{n-1})] = 0, \quad (2.34)$$

unde $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ sunt integrale prime independente funcțional care satisfac condiția (2.31).

Demonstrație. Funcția $u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definită implicit de ecuația (2.34) este o soluție a ecuației (2.22) deoarece provine dintr-o relație de forma (2.28).

Funcția u dată de (2.34) verifică condiția inițială (2.30) deoarece conform lui (2.32) și (2.33) pentru $x_n = x_{n0}$ avem

$$\omega_0(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}) \Big|_{x_n=x_{n0}} = u,$$

$$\omega_k(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}) = x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Din (2.34) rezultă că pentru $x_n = x_{n0}$

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) \Big|_{x_n=x_{n0}} = \psi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

Derivata funcției V din membrul întâi al relației (2.34), în raport cu u , în punctul M_0 , se găsește că este egală cu 1, deci diferită de zero.

Fiind satisfăcute ipotezele teoremei de existență și unicitate a unei funcții reale de mai multe variabile reale definită implicit de ecuația (2.34), funcția $u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ există și este unică. **q.e.d.**

Exercițiul 2.2.4. Să se găsească suprafața integrală a ecuației cu derivate parțiale de ordinul întâi liniară și neomogenă

$$xy \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

care trece prin curba

$$(C_a) : \begin{cases} x = a, \\ 2ayz = a^2 + 2. \end{cases} \quad (2.35)$$

Soluție. Sistemul caracteristic corespunzător este

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-y^2} = \frac{dz}{x}. \quad (2.36)$$

Considerând primele două rapoarte, obținem combinația integrabilă

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

din care obținem integrala primă a sistemului $xy = C_0$.

Amplificând în sistemul (2.36) primul raport cu y , al doilea cu x și raportul al treilea cu y^2 , obținem

$$\frac{ydx}{xy^2} = -\frac{xdy}{xy^2} = \frac{y^2dz}{xy^2}. \quad (2.37)$$

Aceste trei rapoarte, având același numitor, se scriu sub forma

$$\frac{ydx}{1} = \frac{-xdy}{1} = \frac{y^2dz}{1}.$$

Folosind proprietățile rapoartelor egale, deducem

$$\frac{ydx}{1} = \frac{-xdy}{1} = \frac{y^2dz}{1} = \frac{ydx - xdy}{2},$$

ultima egalitate fiind o combinație integrabilă căci se poate scrie în forma $d\left(\frac{x}{y}\right) = d(2z)$.

Integrând ultima combinație integrabilă, obținem a doua integrală primă a sistemului (2.36)

$$2z - \frac{x}{y} = C_1.$$

Integrala generală a ecuației este funcția $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuația $F(x, y, z) = 0$, unde

$$F(x, y, z) = \Phi(C_0, C_1) = \Phi(xy, 2z - \frac{x}{y}).$$

Observăm că integrala generală se mai poate scrie ca

$$z = \frac{x}{2y} + f(xy),$$

unde f este o funcție reală de variabilă reală, arbitrară.

Ansamblul ecuațiilor celor două integrale prime formează ecuațiile unei curbe caracteristice (C) situată pe suprafața integrală (S).

Suprafața integrală căutată (S_a) se obține eliminând pe x, y, z în sistemul format de ecuațiile celor două integrale prime și ecuațiile curbei (C_a). Efectuând această eliminare, rezultă

$$C_1 = \frac{2}{C_0} \implies z - \frac{x}{2y} = \frac{1}{xy} \implies (S_a) \quad 2xyz - x^2 = 2$$

și deci (S_a) este o suprafață algebrică de ordinul al treilea. ■

Exercițiul 2.2.5. Fie ecuația cu derivate parțiale de ordinul întâi cuasilineară

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

Să se determine soluția sa generală și să se rezolve problema lui Cauchy cu condiția inițială

$$z(2, y) = 1 + y^2 \iff \begin{cases} x = 2, \\ z = 1 + y^2. \end{cases}$$

Soluție. Sistemul caracteristic asociat este $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - xy}$. Din primele două rapoarte se obține integrala primă $\frac{x}{y} = C_0$.

Înmulțind primul raport cu y , al doilea cu x și efectuând suma numărătorilor pe suma numitorilor, găsim un nou raport egal cu oricare din cele trei. Egalându-l cu primul raport, obținem combinația integrabilă

$$\frac{d(xy + z)}{xy + z} = \frac{dx}{x}.$$

Integrând, obținem a doua integrala primă $y + \frac{z}{x} = C_1$.

Rezultă că soluția generală este funcția definită implicit de ecuația

$$\Phi\left(\frac{x}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0,$$

unde Φ este o funcție arbitrară derivabilă și cu derivate continue.

Pentru rezolvarea problemei lui Cauchy trebuie să rezolvăm mai întâi sistemul

$$\begin{cases} \frac{2}{y} = C_0, \\ y + \frac{z}{2} = C_1, \end{cases} \implies \begin{cases} z = 2\left(C_1 - \frac{2}{C_0}\right) = \omega_0(C_0, C_1), \\ y = \frac{2}{C_0} = \omega_1(C_0, C_1). \end{cases}$$

Înlocuind pe y și z în $z = 1 + y^2$ găsim relația care corespunde lui (2.34)

$$2\left(C_1 - \frac{2}{C_0}\right) - 1 - \frac{4}{C_0^2} = 0.$$

Dacă se înlocuiesc C_0 și C_1 cu respectiv

$$\psi_0(x, y, z) = \frac{y}{x}, \quad \psi_1(x, y, z) = y + \frac{z}{x},$$

deducem că soluția problemei lui Cauchy este funcția $z = \frac{(x + 2y)^2}{2x} - xy$.

După eliminarea numitorului, observăm că din punct de vedere geometric soluția determinată reprezintă o suprafață algebrică de ordinul al treilea din care se scot intersecțiile acestora cu planul Oyz . ■

Exercițiul 2.2.6. Să se determine suprafața integrală a ecuației cu derivate parțiale de ordinul întâi cuasilineară neomogenă

$$(y - z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z - x)\frac{\partial z}{\partial y} = x - y,$$

care conține dreapta (d) de ecuații $x = y = z$.

Soluție. Sistemul caracteristic asociat ecuației diferențiale date este

$$\frac{dx}{y - z} = \frac{dy}{z - x} = \frac{dz}{x - y}, \quad (2.38)$$

căruia trebuie să-i determinăm două integrale prime funcțional independente. Pentru aceasta, căutăm combinații integrabile ale rapoartelor egale. Se observă că acestea sunt egale cu încă două

$$\frac{dx}{y - z} = \frac{dy}{z - x} = \frac{dz}{x - y} = \frac{dx + dy + dz}{0} = \frac{xdx + ydy + zdz}{0},$$

obținute efectuând suma numărătorilor pe suma numitorilor (penultimul raport) și suma numărătorilor pe suma numitorilor celor trei rapoarte din (2.38), înmulțite în prealabil cu x , y și respectiv z .

Când într-o succesiune de rapoarte egale numitorul unui raport este zero, numărătorul acelui raport trebuie să fie, de asemenea, zero. Prin urmare,

$$dx + dy + dz = 0, \quad xdx + ydy + zdz = 0.$$

Din aceste egalități se obțin cele două integrale prime independente funcțional ale sistemului simetric (2.38)

$$x + y + z = C_1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = C_2. \quad (2.39)$$

Geometric, prima integrală primă reprezintă un fascicul de plane paralele de normală $\mathbf{N} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, iar cea de a doua este o familie de sfere concentrice cu centrul în originea reperului.

Soluția generală a sistemului simetric (2.38) este ansamblul celor două integrale prime care, din punct de vedere geometric, reprezintă o familie dublu parametrică de cercuri în spațiu, care sunt curbele caracteristice.

Pentru a determina suprafața integrală care conține dreapta (d) , impunem condiția ca sistemul format de ecuațiile curbelor caracteristice și ecuațiile dreptei să fie compatibil, ceea ce conduce la relația de compatibilitate $C_1^2 - 3C_2 = 0$.

Înlocuind C_1 și C_2 în relația de compatibilitate cu expresiile lor din (2.39) se găsește că suprafața integrală căutată este conul pătratic (eliptic) cu vârful în origine de ecuație $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$. ■

Capitolul 3

Elemente de teoria câmpurilor

3.1 Câmpuri scalare. Curbe și suprafețe de nivel

Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu tridimensional, $M(x, y, z)$ un punct oarecare din D și $f \in \mathcal{F}(D)$ o funcție reală definită pe D . Valorile funcției f , scrise în forma $f(M)$, sau în forma $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z)$, unde $\mathbf{x} = (x, y, z) \in D$, sunt numere reale sau *scalari*. Astfel, funcția f se mai numește și *funcție scalară*.

Definiția 3.1.1. Funcția scalară $f \in \mathcal{F}(D)$, $D \subset \mathbb{R}^3$, se numește **câmp scalar tridimensional**.

Dacă domeniul D este bidimensional, deci $D \subset \mathbb{R}^2$, sau D este o porțiune de suprafață mărginită de o curbă în spațiu, poziția punctului $M \in D$ va fi determinată de doi parametri (coordonatele carteziene x și y ale punctului din plan în primul caz, sau coordonatele curbilinii u și v ale punctului situat pe o suprafață în cel de al doilea caz). După caz, vom scrie: $f(M) = f(x, y)$; $f(M) = f(u, v)$. În ambele cazuri, funcția scalară $f \in \mathcal{F}(D)$ se numește *câmp scalar bidimensional*.

În cele ce urmează vom presupune că funcția f este continuă pe D și admite derivate parțiale de orice ordin continue în D .

Exemplul 3.1.1. Câmpul temperaturilor $T = T(M)$ într-o regiune tridimensională sau bidimensională și câmpul presiunilor $p = p(M)$ într-un domeniu plan sau spațial sunt exemple de câmpuri scalare.

Exemplul 3.1.2. Funcția reală de două variabile reale

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(M) = f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad (3.1)$$

este un câmp scalar bidimensional.

Exemplul 3.1.3. Funcția reală de trei variabile reale

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(M) = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (3.2)$$

este un câmp scalar definit în întreg spațiu tridimensional.

Fie câmpul scalar $f(M)$, $M \in D \subset \mathbb{R}^3$ și $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$ fixat.

Definiția 3.1.2. Se numește **suprafață de nivel** care trece prin M_0 a câmpului scalar tridimensional $f(M)$, locul geometric S_0 al punctelor $M \in D$ cu proprietatea

$$f(M) = f(M_0) \quad (3.3)$$

sau, având în vedere coordonatele carteziene ale punctelor M și M_0 ,

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0). \quad (3.4)$$

Deoarece M_0 este un punct al suprafeței de nivel S_0 , ecuația acesteia este (3.3) sau (3.4).

Observația 3.1.1. Prin orice punct $M_0 \in D$ trece o suprafață de nivel a câmpului scalar tridimensional $f \in \mathcal{F}(D)$, iar orice două suprafețe de nivel ale sale ori sunt identice, ori nu au nici un punct comun.

Exemplul 3.1.4. Suprafețele de nivel ale câmpului termic dintr-o regiune tridimensională sunt **izotermele**; cele ale câmpului presiunilor sunt **izobarele**; suprafețele de nivel ale câmpului scalar (3.2) sunt sfere cu centrele în origine.

Definiția 3.1.3. Prin **curbă de nivel** a câmpului scalar bidimensional $f \in \mathcal{F}(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ (sau $D \subset \Sigma$, unde Σ este o suprafață), se înțelege locul geometric al punctelor $M(x, y) \in D$ (sau $M(u, v) \in D \subset \Sigma$) cu proprietatea

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad \text{sau} \quad (f(u, v) = f(u_0, v_0)), \quad (3.5)$$

unde $M_0(x_0, y_0)$, (sau $M_0(u_0, v_0)$,) sunt puncte oarecare, dar fixate, din D .

Observația 3.1.2. Prin orice punct $M_0 \in D$ trece câte o curbă de nivel și oricare două asemenea curbe sau coincid, sau nu au puncte comune.

Exemplul 3.1.5. Curbele de nivel ale câmpului scalar (3.1) sunt elipse omofocale, cu centrul de simetrie în origine, care au axele de coordonate ca axe de simetrie și semiaxe $a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}$ și $b\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}$.

O primă imagine a unui câmp scalar este dată de suprafețele (curbele) sale de nivel care arată modul cum sunt stratificate valorile câmpului, viteza de stratificare într-un punct fiind tocmai derivata după o direcție oarecare de versor \mathbf{s} a câmpului în punctul considerat.

3.2 Derivata după o direcție și gradientul unui câmp scalar

Să considerăm câmpul scalar $f \in \mathcal{F}(D)$, \mathbf{s} un versor arbitrar și, pentru fiecare punct $\mathbf{x} \in D$, definim funcția reală g de variabila reală t

$$g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{s}), \quad t \in I, \quad \mathbf{x} + t\mathbf{s} \in D, \quad (3.6)$$

unde I este un interval real.

Evident, avem o infinitate de funcții g (pentru fiecare $\mathbf{x} \in D$ există o asemenea funcție) și pentru toate, avem $g(0) = f(\mathbf{x})$. Funcțiile g sunt restricțiile funcției f la dreapta care trece prin \mathbf{x} și are direcția \mathbf{s} .

Presupunem că, pentru orice $\mathbf{x} \in D$, funcția g corespunzătoare este derivabilă în $t = 0$.

Definiția 3.2.1. Spunem că funcția f este **derivabilă în D după direcția \mathbf{s}** dacă funcțiile g , definite în (3.6), sunt derivabile în $t = 0$.

Definiția 3.2.2. Dacă f este derivabilă în D după direcția \mathbf{s} , numărul real $g'(0)$ se numește **derivata câmpului scalar f după direcția \mathbf{s} în punctul $\mathbf{x} \in D$** .

Notăm această derivată cu $\frac{df}{ds}(\mathbf{x})$. Prin urmare,

$$\frac{df}{ds}(\mathbf{x}) = g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{s}) - f(\mathbf{x})}{t}. \quad (3.7)$$

Definiția 3.2.3. Funcția $\frac{df}{ds} \in \mathcal{F}(D)$ ale cărei valori se determină după legea (3.7), se numește **derivata câmpului scalar f după direcția \mathbf{s}** .

Observația 3.2.1. Fiind definite cu ajutorul derivatelor unei funcții reale de o variabilă reală, proprietățile derivatelor după o direcție ale câmpurilor scalare sunt aceleași ca cele ale derivatelor funcțiilor reale de o variabilă reală.

În consecință, putem scrie (pentru simplificare, ometem variabila \mathbf{x}):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{ds}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \frac{df_1}{ds} + \lambda_2 \frac{df_2}{ds}; \\ \frac{d}{ds}(f_1 \cdot f_2) = \frac{df_1}{ds} \cdot f_2 + f_1 \cdot \frac{df_2}{ds}; \\ \frac{d}{ds}\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \frac{\frac{df_1}{ds} \cdot f_2 - f_1 \cdot \frac{df_2}{ds}}{f_2^2}; \\ \frac{d}{ds}(F(f)) = F'(f) \cdot \frac{df}{ds}, \end{array} \right. \quad (3.8)$$

unde f_1, f_2 și f sunt câmpuri scalare derivabile în D după direcția \mathbf{s} , iar $F(f) = F \circ f$ este compusa funcției f cu funcția F .

Deoarece am presupus că funcția f care definește un câmp scalar are derivate parțiale continue în D , rezultă că f este diferențiabilă în D și valoarea în $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$ a diferențialei funcției f în punctul $\mathbf{x} \in D$ este

$$df(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = df(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = (\nabla f)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}, \quad (3.9)$$

unde

$$(\nabla f)(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}) \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}) \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}) \mathbf{k} \quad (3.10)$$

este *gradientul* funcției f în punctul $\mathbf{x} \in D$. Între gradientul funcției f și vectorul \mathbf{h} se efectuează *produsul scalar standard* a doi vectori din \mathbb{R}^3 .

$$df(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x})h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x})h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x})h_3. \quad (3.11)$$

Operatorul diferențial $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$ se numește *operatorul lui Hamilton*¹ sau *operatorul nabla*.

Pe de altă parte, se știe că dacă f este diferențiabilă în D , atunci f este derivabilă în D după orice direcție și derivata sa după direcția \mathbf{s} într-un punct $\mathbf{x} \in D$ este valoarea în \mathbf{s} a diferențialei funcției f în punctul \mathbf{x} . Prin urmare,

$$\frac{df}{ds}(\mathbf{x}) = df(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = df(\mathbf{x})(\mathbf{s}). \quad (3.12)$$

Din (3.9) și (3.12) deducem

$$\frac{df}{ds}(\mathbf{x}) = (\nabla f)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{s}, \quad (3.13)$$

iar din (3.10) și (3.13) rezultă

$$\frac{df}{ds}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}) s_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}) s_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}) s_3. \quad (3.14)$$

Fie P punctul din D al cărui vector de poziție este $\mathbf{x} + t\mathbf{s}$. Conform Observației 3.1.1, prin punctul P trece o suprafață de nivel (S) a câmpului scalar f . Dreapta (d) care trece prin M și are direcția \mathbf{s} , intersectează suprafața (S) în punctul P . Astfel, t este abscisa curbilinie a punctului P de pe dreapta (d) pe care M este originea elementului de arc. Dacă notăm cu $t = \ell(MP)$ lungimea arcului MP , formula (3.7) se rescrie în forma

$$\frac{df}{ds}(\mathbf{x}) = \lim_{\substack{\ell(MP) \rightarrow 0 \\ P \in (d)}} \frac{f(P) - f(M)}{\ell(MP)}. \quad (3.15)$$

Considerăm acum că punctul $P \in (S)$ nu este pe dreapta (d) , ci pe o curbă netedă arbitrară Γ care trece prin M și are versorul tangentei în M identic cu \mathbf{s} .

Definiția 3.2.4. Se numește **variație medie** a câmpului scalar f , raportul

$$\frac{f(P) - f(M)}{\ell(MP)}, \quad (3.16)$$

unde $P \in \Gamma \cap (S)$ iar $\ell(MP)$ este abscisa curbilinie a punctului P .

Teorema 3.2.1. Limita variației medii (3.16) a câmpului scalar f atunci când P tinde, pe curba Γ , la punctul $M(\mathbf{x})$, este egală cu derivata în \mathbf{x} după direcția \mathbf{s} a câmpului scalar f .

Demonstrație. Evaluarea diferenței de la numărătorul variației medii, conduce la

$$f(P) - f(M) = (\nabla f)(\mathbf{x}) \cdot (\vec{OP} - \vec{OM}) + \varepsilon \cdot (\vec{OP} - \vec{OM}), \quad (3.17)$$

unde ε este o funcție vectorială de variabilă vectorială cu proprietatea

$$\lim_{P \rightarrow M} \varepsilon = 0, \quad (3.18)$$

cu mențiunea că punctul P , în acest proces de trecere la limită, se află pe curba Γ .

¹Hamilton, William Rowan (1805 – 1865), fizician, astronom și matematician irlandez.

Dacă împărțim (3.17) prin $\ell(MP)$, trecem la limită pentru $P \rightarrow M$, ceea ce este echivalent cu $\ell(MP) \rightarrow 0$, ținând cont de (3.18), (3.14) și de rezultatul

$$\lim_{\substack{\ell(MP) \rightarrow 0 \\ P \in \Gamma}} \frac{\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}}{\ell(MP)} = \mathbf{s},$$

din geometria diferențială, se deduce

$$\lim_{\substack{\ell(MP) \rightarrow 0 \\ P \in \Gamma}} \frac{f(P) - f(M)}{\ell(MP)} = \frac{df}{ds}(\mathbf{x}), \quad (3.19)$$

ceea ce demonstrează teorema.

q.e.d.

Observația 3.2.2. Relația (3.19) se poate lua ca definiție pentru derivata după direcția \mathbf{s} a câmpului scalar f în punctul $\mathbf{x} \in D$.

Ne propunem să determinăm acea direcție a spațiului după care derivata câmpului scalar f în punctul \mathbf{x} este maximă.

Ținând cont că produsul scalar a doi vectori din \mathbb{R}^3 este egal cu produsul dintre normele vectorilor și cosinusul unghiului θ dintre ei și că $\|\mathbf{s}\| = 1$, din (3.13) deducem

$$\frac{df}{ds}(\mathbf{x}) = \|(\nabla f)(\mathbf{x})\| \cdot \cos \theta. \quad (3.20)$$

Din (3.20) se vede că derivata este maximă când $\theta = 0$, adică atunci când versorul \mathbf{s} este versorul $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ al vectorului $(\nabla f)(\mathbf{x})$,

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{(\nabla f)(\mathbf{x})}{\|(\nabla f)(\mathbf{x})\|}. \quad (3.21)$$

Pentru a demonstra o proprietate remarcabilă a versorului (3.21) să presupunem că M este fixat și notat cu M_0 și că vectorul său de poziție este $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Fie $\gamma_0 \subset (S_0)$ o curbă netedă arbitrară care trece prin M_0 și care are tangenta \mathbf{t}_0 în M_0 . Dacă $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ sunt ecuațiile parametrice ale curbei γ_0 și punctul M_0 corespunde lui t_0 pe curba γ_0 , atunci

$$\mathbf{t}_0 = \frac{d\varphi}{dt}(t_0) \mathbf{i} + \frac{d\psi}{dt}(t_0) \mathbf{j} + \frac{d\chi}{dt}(t_0) \mathbf{k}. \quad (3.22)$$

Cum curba γ_0 este situată pe (S_0) , unde (S_0) este suprafața de nivel care trece prin M_0 de ecuație $f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$, avem

$$f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) = f(x_0, y_0, z_0). \quad (3.23)$$

Dacă derivăm (3.23) ca o funcție compusă și considerăm $t = t_0$, deducem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0) \frac{d\varphi}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \frac{d\psi}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}_0) \frac{d\chi}{dt}(t_0) = 0. \quad (3.24)$$

Din (3.10), (3.21), (3.22) și (3.24), obținem

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{t}_0 = 0,$$

care demonstrează că $\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)$ este ortogonal tuturor tangentelor în M_0 la toate curbele $\gamma_0 \subset (S_0)$ care trec prin M_0 . Cum locul geometric al acestor tangente este planul tangent în M_0 la suprafața (S_0) , rezultă că $\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)$ este versorul normalei în M_0 la suprafața de nivel (S_0) . Sensul versorului $\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)$ este spre acea parte a spațiului în care $f(x, y, z) > f(x_0, y_0, z_0)$. Așadar:

Teorema 3.2.2. Derivata câmpului scalar f după direcția \mathbf{s} în punctul \mathbf{x}_0 este maximă după direcția versorului $\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)$ a normalei în M_0 la suprafața de nivel (S_0) care trece prin M_0 , sensul normalei fiind sensul creșterii valorilor câmpului scalar f .

Revenind la un punct arbitrar $\mathbf{x} \in D$, obținem că derivata după direcția normalei $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ în punctul M la suprafața de nivel care trece prin M are expresia

$$\frac{df}{d\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = (\nabla f)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}). \quad (3.25)$$

Cu ajutorul lui (3.21), din (3.25) deducem

$$\frac{df}{d\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \|(\nabla f)(\mathbf{x})\|. \quad (3.26)$$

Cum gradientul câmpului scalar f în punctul \mathbf{x} este coliniar și de același sens cu $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, din (3.26) obținem

$$(\nabla f)(\mathbf{x}) = \frac{df}{d\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}). \quad (3.27)$$

Să mai observăm că folosind (3.20) și (3.25) putem scrie

$$\frac{df}{ds}(\mathbf{x}) = \frac{df}{d\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \cos \theta, \quad (3.28)$$

unde θ este unghiul dintre versorii \mathbf{s} și \mathbf{n} .

Formula (3.28) dă legătura între derivata după un versor oarecare \mathbf{s} și derivata după direcția normalei în punctul M la suprafața de nivel care trece prin M , ocazie cu care reîntâlnim concluzia Teoremei 3.2.2.

Din (3.27) deducem că regulile de calcul pentru gradient sunt aceleași cu regulile de calcul ale derivatei după o direcție. Dacă avem în vedere (3.8) și renunțăm la scrierea variabilei vectoriale \mathbf{x} , se pot scrie relațiile:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda\nabla\varphi + \mu\nabla\psi, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \\ \nabla(\varphi\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi; \\ \nabla\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) = \frac{\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi}{\psi^2}, \quad \psi \neq 0; \\ \nabla F(\varphi) = F'(\varphi)\nabla\varphi. \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Mai precizăm că pentru gradientul câmpului scalar φ se folosește și notația $\text{grad } \varphi$.

Exercițiul 3.2.1. Se dă câmpul scalar

$$\varphi(x, y, z) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^2},$$

unde

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Să se calculeze unghiul dintre vectorii $(\nabla\varphi)(A)$ și $(\nabla\varphi)(B)$, unde A și B sunt puncte de coordonate $A(2, 1, 1)$ și $B(0, 1, -1)$.

Soluție. Dacă aplicăm regulile de calcul (3.29), găsim că gradientul câmpului scalar φ în punctul oarecare $M(x, y, z)$, diferit de originea reperului $Oxyz$, este

$$(\nabla\varphi)(M) = -2 \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} + \frac{1}{r^2} \mathbf{a},$$

de unde rezultă $(\nabla\varphi)(A) = -\frac{1}{18}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 7\mathbf{k})$ și $(\nabla\varphi)(B) = \frac{1}{2}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$. Cum cosinusul unghiului θ dintre doi vectori este raportul dintre produsul scalar al lor și produsul normelor acestora, obținem

$$\cos \theta = \frac{(\nabla\varphi)(A) \cdot (\nabla\varphi)(B)}{\|(\nabla\varphi)(A)\| \|(\nabla\varphi)(B)\|} = -\frac{5}{9}.$$

Semnul minus dovedește că unghiul dintre cei doi gradienti este obtuz. ■

Exercițiul 3.2.2. Fie câmpul scalar $\varphi(x, y, z) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^2 + (\mathbf{a} \times \mathbf{r})^2$, unde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ este vectorul de poziție al punctului $M(x, y, z)$, iar \mathbf{a} este un versor constant.

- Să se determine suprafața de nivel care trece prin $M_0(1, 2, 3)$.
- Să se calculeze derivata câmpului scalar φ după direcția de parametri directori $(2, -1, 2)$ în punctul M_0 .

Soluție. Deoarece $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^2 = a^2 r^2 \cos^2 \theta$ și $(\mathbf{a} \times \mathbf{r})^2 = a^2 r^2 \sin^2 \theta$, iar $a^2 = 1$, deducem că valorile câmpului scalar sunt $\varphi(x, y, z) = r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

a) Suprafața de nivel care trece prin $M_0(1, 2, 3)$ este $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, adică sfera de rază $R = \sqrt{14}$ și cu centrul în origine.

b) Versorul \mathbf{s} al vectorului \mathbf{v} de parametri directori $(2, -1, 2)$ este

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

Gradientul câmpului scalar φ în punctul M_0 este

$$(\nabla\varphi)(M) = (\text{grad } \varphi)(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k},$$

de unde

$$(\nabla\varphi)(M_0) = (\text{grad } \varphi)(1, 2, 3) = 2(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}).$$

Derivata funcției φ în punctul M_0 după direcția \mathbf{s} este

$$\frac{d\varphi}{ds}(M_0) = (\nabla\varphi)(M_0) \cdot \mathbf{s} = 2(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot \frac{1}{3}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \frac{2}{3}(2 - 2 + 6) = 4.$$

Rezultă că unghiul θ dintre vectorii $(\nabla\varphi)(M_0)$ și \mathbf{s} este ascuțit. ■

3.3 Câmpuri vectoriale. Linii și suprafețe de câmp

Definiția 3.3.1. Se numește **câmp vectorial** o funcție vectorială de variabilă vectorială definită pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}^3$.

Funcția vectorială \mathbf{v} care definește un câmp vectorial pe $D \subset \mathbb{R}^3$ se poate scrie în una din formele:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(P); \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}); \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z), \quad (3.30)$$

unde \mathbf{r} este vectorul de poziție al punctului $P \in D$, care, în reperul $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, are expresia analitică

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (3.31)$$

unde O este originea reperului, iar $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ este o bază ortonormată în \mathbb{R}^3 .

Notând

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}, \quad (3.32)$$

unde $v_m = v_m(x, y, z)$, $m = 1, 2, 3$, observăm că studiul unei funcții vectoriale de trei variabile reale (sau de variabilă vectorială), adică a unui câmp vectorial, se reduce la studiul a trei funcții reale de trei variabile reale (a trei câmpuri scalare tridimensionale).

În cele ce urmează, vom presupune că funcția vectorială care definește un câmp vectorial pe domeniul tridimensional D este continuă, are derivate parțiale continue în D care nu se anulează în nici un punct din D .

Definiția 3.3.2. Se numește **linie de câmp** în D a câmpului vectorial \mathbf{v} , o curbă strâmbă $(L) \subset D$ cu proprietatea că tangenta în fiecare punct $P \in (L)$ are ca vector director pe $\mathbf{v}(P)$.

Cum un alt vector director al tangentei în punctul $P(x, y, z) \in (L)$ este diferențiala vectorului (3.31)

$$d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k} \quad (3.33)$$

avem că \mathbf{v} și $d\mathbf{r}$ sunt vectori directori ai aceleiași drepte, adică ei sunt coliniari.

În concluzie, coordonatele acestor doi vectori directori trebuie să fie proporționale și deci

$$\frac{dx}{v_1(x, y, z)} = \frac{dy}{v_2(x, y, z)} = \frac{dz}{v_3(x, y, z)}. \quad (3.34)$$

Definiția 3.3.3. Sistemul simetric (3.34) se numește **sistemul diferențial al liniilor de câmp** în D a câmpului vectorial $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$, unde $\mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$ este spațiul liniar al funcțiilor vectoriale definite pe domeniul D .

Observația 3.3.1. În baza teoremei de existență și unicitate a soluției unui sistem simetric, rezultă că prin orice punct al domeniului D trece câte o singură linie de câmp a câmpului vectorial $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$.

Definiția 3.3.4. Se numește **suprafață de câmp** a unui câmp vectorial, orice suprafață generată de o linie de câmp a aceluși câmp vectorial.

Teorema 3.3.1. Condiția necesară și suficientă ca o suprafață (S) să fie suprafață de câmp a câmpului vectorial $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$ este ca vectorul $\mathbf{v}(P)$ să fie conținut în planul tangent la suprafața (S) în punctul $P \in (S)$.

Demonstrație. Necesitatea. O linie de câmp (G) a câmpului vectorial \mathbf{v} este ansamblul a două integrale prime independente funcțional ale sistemului simetric (3.34)

$$(G) \quad \begin{cases} \psi_1(x, y, z) = C_1 \\ \psi_2(x, y, z) = C_2, \end{cases} \quad (3.35)$$

unde ψ_1, ψ_2 sunt două integrale prime independente funcțional.

Pentru ca (G) din (3.35) să genereze o suprafață, parametrii C_1 și C_2 trebuie să fie legați printr-o relație de forma

$$\Phi(C_1, C_2) = 0, \quad (3.36)$$

numită *relație de condiție* și că, suprafața de câmp corespunzătoare condiției (3.36) se obține eliminând constantele arbitrare C_1 și C_2 între (3.35) și (3.36). Obținem

$$\Phi(\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)) = 0, \quad (3.37)$$

deci o ecuație de forma

$$(S) : F(x, y, z) = 0 \quad (3.38)$$

în care recunoaștem ecuația carteziană implicită a unei suprafețe (S) . În plus, în orice punct $P \in (S)$, vectorul $\mathbf{v}(P)$ este tangent suprafeței de ecuație (3.37) și deci conținut în planul tangent în P la suprafața (S) , deoarece $\mathbf{v}(P)$ este tangent la linia de câmp care trece prin P și generează suprafața (S) .

Suficiența. Trebuie să arătăm că orice suprafață (S) de ecuație (3.38) cu proprietatea că $\mathbf{v}(P)$ este conținut în planul tangent în punctul P la (S) este generată de liniile de câmp ale câmpului vectorial \mathbf{v} .

Ecuația (3.38) poate fi considerată ca o suprafață de nivel a câmpului scalar F .

Se știe că un vector coliniar și de același sens cu sensul de creștere al funcției F în punctul $P(x, y, z) \in (S)$ este

$$(\nabla F)(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) \mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) \mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \mathbf{k}. \quad (3.39)$$

Deoarece vectorul (3.39) este ortogonal vectorului $\mathbf{v}(P)$ conținut în planul tangent în P la suprafața (S) , rezultă că produsul lor scalar este nul, deci

$$v_1(x, y, z) \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) + v_2(x, y, z) \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) + v_3(x, y, z) \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 0, \quad (3.40)$$

ceea ce arată că funcția $F(x, y, z)$ din (3.38) verifică o ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi omogenă. Dar orice soluție a ecuației diferențiale (3.40) este generată de curbele integrale ale sistemului caracteristic asociat, adică de (3.34), iar curbele caracteristice ale sale sunt liniile de câmp ale câmpului vectorial $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$. Teorema este astfel demonstrată. **q.e.d.**

Definiția 3.3.5. Câmpul vectorial $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$ se numește **biscalar** dacă există funcția scalară derivabilă $\varphi \in \mathcal{F}(D)$ și funcția diferențiabilă $F \in \mathcal{F}(D)$, astfel încât să avem

$$\mathbf{v} = \varphi \text{grad } F = \varphi \nabla F. \quad (3.41)$$

Derivata după o direcție \mathbf{s} a unui câmp vectorial $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$ într-un punct $\mathbf{x} \in D$ se definește la fel ca la câmpurile scalare

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds}(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x} + t\mathbf{s}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})}{t}. \quad (3.42)$$

Dacă funcția \mathbf{v} are derivate parțiale de ordinul întâi continue, existența limitei (3.42) este asigurată și

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds}(\mathbf{x}) = \frac{dv_1}{ds}(\mathbf{x}) \mathbf{i} + \frac{dv_2}{ds}(\mathbf{x}) \mathbf{j} + \frac{dv_3}{ds}(\mathbf{x}) \mathbf{k}. \quad (3.43)$$

Dacă se ține cont de (3.14), (3.43) devine

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds}(\mathbf{x}) = s_1 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}(\mathbf{x}) + s_2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}(\mathbf{x}) + s_3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}(\mathbf{x}). \quad (3.44)$$

Relația (3.44) constituie *expresia carteziană* a derivatei câmpului vectorial \mathbf{v} , în punctul $\mathbf{x} \in D$, după direcția de versor $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, expresie care se mai poate scrie în forma

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds}(\mathbf{x}) = \left(s_1 \frac{\partial}{\partial x} + s_2 \frac{\partial}{\partial y} + s_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{v}. \quad (3.45)$$

Deoarece operatorul $s_1 \frac{\partial}{\partial x} + s_2 \frac{\partial}{\partial y} + s_3 \frac{\partial}{\partial z}$ poate fi interpretat formal ca produsul scalar dintre \mathbf{s} și operatorul vectorial ∇ , se poate adopta convenția de scriere

$$\mathbf{s} \cdot \nabla = s_1 \frac{\partial}{\partial x} + s_2 \frac{\partial}{\partial y} + s_3 \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.46)$$

Cu această convenție și cu renunțarea la menționarea variabilei \mathbf{x} , formula de calcul (3.45) ia forma

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds} = (\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (3.47)$$

Exercițiul 3.3.1. Să se determine derivata câmpului vectorial $\mathbf{v}(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + z(x^2 + y^2)\mathbf{k}$ după direcția de parametri directori $(1, 3, -1)$. Care este locul geometric al punctelor din spațiu pentru care derivata după direcția \mathbf{s} este normală vectorului $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$?

Soluție. Să calculăm versorul direcției menționate. Fiindcă norma vectorului \mathbf{v} este $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{11}$, rezultă că versorul direcției după care trebuie să derivăm este $\mathbf{s} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{11}}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k})$.

Folosind (3.47), găsim

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{11}} \left[(y^2 + 6xy)\mathbf{i} + (2xy + 3x^2)\mathbf{j} + (2xz + 6yz - x^2 - y^2)\mathbf{k} \right].$$

Pentru a determina locul geometric cerut, impunem condiția de ortogonalitate $\frac{d\mathbf{v}}{ds} \cdot \mathbf{v} = 0$ și obținem ecuația $x^2 + 4xy + xz + 3xz = 0$ ce reprezintă ecuația unei quadrice (suprafață algebrică de ordinul al doilea).

Analizând invariantii quadricii constatăm că locul geometric este un con pătratic cu vârful în origine. ■

Exercițiul 3.3.2. Să se determine liniile de câmp ale câmpurilor vectoriale:

- 1⁰. $\mathbf{v}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\mathbf{k}$;
- 2⁰. $\mathbf{v}(x, y, z) = (xy - 2z^2)\mathbf{i} + (4xz - y^2)\mathbf{j} + (yz - 2x^2)\mathbf{k}$;
- 3⁰. $\mathbf{v}(x, y, z) = (xz - y)\mathbf{i} + (yz - x)\mathbf{j} + (z^2 - 1)\mathbf{k}$;
- 4⁰. $\mathbf{v}(x, y, z) = (x + y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$.

Soluție. Liniile de câmp sunt curbele integrale ale respectiv sistemelor simetrice:

$$\begin{aligned} 1^0. \quad & \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \\ 2^0. \quad & \frac{dx}{xy - 2z^2} = \frac{dy}{4xz - y^2} = \frac{dz}{yz - 2x^2}; \\ 3^0. \quad & \frac{dx}{xz - y} = \frac{dy}{yz - x} = \frac{dz}{z^2 - 1}; \\ 4^0. \quad & \frac{dx}{x + y} = \frac{dy}{y - x} = \frac{dz}{-2z}. \end{aligned}$$

Se obțin combinațiile integrabile:

$$\begin{aligned}
 1^0. \quad & \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, & xdx + ydy + (z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})dz = 0; \\
 2^0. \quad & ydx + xdy + 2zdz = 0, & 2xdx + zdy + ydz = 0; \\
 3^0. \quad & \frac{dx - dy}{(x - y)(1 + z)} = \frac{dz}{z^2 - 1}, & \frac{xdx - ydy}{(x^2 - y^2)z} = \frac{dz}{z^2 - 1}; \\
 4^0. \quad & \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{dz}{-2z}, & \frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x},
 \end{aligned}$$

care conduc respectiv la integralele prime:

$$\begin{aligned}
 1^0. \quad & \frac{y}{x} = C_1, & z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = C_2; \\
 2^0. \quad & z^2 + xy = C_1, & x^2 + yz = C_2; \\
 3^0. \quad & \frac{x - y}{z - 1} = C_1, & \frac{x + y}{z + 1} = C_2; \\
 4^0. \quad & (x^2 + y^2)z = C_1, & \ln(x^2 + y^2) + 2\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C_2.
 \end{aligned}$$

Curbele integrale ale sistemelor simetrice de mai sus sunt:

$$\begin{aligned}
 1^0. \quad & \left\{ \begin{array}{l} \frac{y}{x} = C_1 \\ z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = C_2 \end{array} \right. ; & 2^0. \quad \left\{ \begin{array}{l} z^2 + xy = C_1 \\ x^2 + yz = C_2 \end{array} \right. ; \\
 3^0. \quad & \left\{ \begin{array}{l} \frac{x - y}{z - 1} = C_1 \\ \frac{x + y}{z + 1} = C_2 \end{array} \right. ; & 4^0. \quad \left\{ \begin{array}{l} (x^2 + y^2)z = C_1 \\ \ln(x^2 + y^2) + 2\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C_2. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Primul câmp vectorial are liniile de câmp la intersecția planelor $y = C_1x$ cu paraboloidii de rotație în jurul axei Oz de ecuație

$$z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = C_2.$$

De menționat că fiecare plan al familiei $y = C_1x$ nu trebuie să conțină dreapta de intersecție a acestuia cu planul Oyz .

Liniile de câmp al celui de al doilea câmp vectorial se găsesc la intersecția hiperboloidilor:

$$z^2 + xy = C_1; \quad x^2 + yz = C_2.$$

Al treilea câmp vectorial are liniile de câmp drepte rezultate din intersecția familiilor de plane:

$$x - y = C_1(z - 1); \quad x + y = C_2(z + 1).$$

Din fiecare dreaptă se scot punctele de cote -1 și 1 .

Curbele de intersecție ale suprafețelor de rotație în jurul axei Oz , de ecuații $z = \frac{C_1}{x^2 + y^2}$, și suprafețele cilindrice cu generatoarele paralele cu axa Oz , de ecuații $\ln(x^2 + y^2) + 2\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C_2$, reprezintă liniile de câmp ale ultimului câmp vectorial. ■

Exercițiul 3.3.3. Să se determine suprafețele de câmp ale câmpurilor vectoriale de mai jos care trec prin curbele (Γ) specificate alăturat

1. $\mathbf{v}(x, y, z) = xy^2 \mathbf{i} + x^2y \mathbf{j} + (x^2 + y^2)z \mathbf{k}, \quad (\Gamma) : \begin{cases} x = 2y, \\ z = 1, \end{cases}$
2. $\mathbf{v}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + (z - x^2 - y^2 + 1) \mathbf{k}, \quad (\Gamma) : \begin{cases} x - z = a^2, \\ x^2 + y^2 = a^2 - 1, \end{cases}$
3. $\mathbf{v}(x, y, z) = xz \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + (x^2 + y^2 + z^2) \mathbf{k}, \quad (\Gamma) : \begin{cases} x = 1, \\ z = y^2, \end{cases}$
4. $\mathbf{v}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + (z - x^2 \sin y) \mathbf{k}, \quad (\Gamma) : \begin{cases} x = y^2, \\ z = 0. \end{cases}$

Soluție. Sistemele diferențiale ale liniilor de câmp sunt:

1. $\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)};$
2. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - x^2 - y^2 + 1};$
3. $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{x^2 + y^2 + z^2};$
4. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - x^2 \sin y}.$

1. O combinație integrabilă a primului sistem simetric este dată de primele două rapoarte egale care, după simplificare cu x^2y^2 , conduce la $x dx - y dy = 0$ și din care se obține integrala primă $x^2 - y^2 = C_1$.

O a doua combinație integrabilă se obține scriind

$$\frac{\frac{dx}{x}}{\frac{y}{y^2}} = \frac{\frac{dy}{y}}{x^2} = \frac{\frac{dz}{z}}{x^2 + y^2}.$$

Dacă ultimul raport îl egalăm cu suma primelor două, după simplificarea cu $x^2 + y^2$, obținem combinația integrabilă

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

care furnizează a doua integrală primă independentă

$$\frac{z}{xy} = C_2.$$

Atunci, generatoarele (G) ale suprafeței de câmp au ecuațiile

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1 \\ \frac{z}{xy} = C_2. \end{cases}$$

Dar, generatoarele (G) trebuie să se sprijine pe curba directoare Γ .

Pentru aceasta, sistemul format de ecuațiile lor

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1 \\ \frac{z}{xy} = C_2 \\ x = 2y, \\ z = 1 \end{cases}$$

trebuie să fie compatibil. Fiind un sistem de patru ecuații cu trei necunoscute x, y și z , el va fi compatibil numai dacă constantele C_1, C_2 satisfac relația de condiție

$$2C_1C_2 = 3.$$

Înlocuind pe C_1 și C_2 din integralele prime găsim că suprafața de câmp are ecuația carteziană explicită

$$z = \frac{3xy}{2(x^2 - y^2)}.$$

2. O integrală primă se vede imediat și anume

$$\frac{x}{y} = C_1$$

și se obține integrând primele două rapoarte egale. Înmulțind primele două rapoarte cu x , respectiv y și adunându-le, obținem un nou raport egal cu primele trei. Un al cincilea raport egal cu primele patru se obține adunând al treilea raport cu al patrulea. Combinația obținută prin egalarea ultimelor două rapoarte

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2)} = \frac{\frac{1}{2}d(x^2 + y^2) + dz}{z + 1}$$

este integrabilă și, după efectuarea notației $t = x^2 + y^2$, se obține ecuația diferențială de ordinul întâi liniară și neomogenă

$$\frac{dz}{dt} - \frac{1}{2t}z = \frac{1-t}{2t}$$

a cărei soluție generală este

$$z = C_2\sqrt{t} - 1 - t.$$

Revenind la notație, constatăm că cea de a doua integrală primă este

$$\frac{z + 1 + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C_2.$$

Suprafața de câmp se obține rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = C_1 \\ \frac{z + 1 + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C_2 \\ x - z = a^2 \\ x^2 + y^2 = a^2 - 1. \end{cases}$$

Acest sistem este compatibil dacă și numai dacă este satisfăcută relația de condiție

$$C_1 = C_2\sqrt{1 + C_1^2}.$$

Înlocuind pe C_1 și C_2 găsim că suprafața de câmp are ecuația

$$z = -x^2 - y^2 + x - 1.$$

3. O integrală primă este $\frac{y}{x} = C_1$. Înmulțim primul raport cu x , al doilea cu y , alcătuim din acestea un nou raport egal cu celelalte ce are la numărător suma numărătorilor celor două rapoarte modificate și la numitor suma numitorilor acelorași rapoarte și obținem în acest fel combinația integrabilă

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{2z(x^2 + y^2)} = \frac{dz}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Cu notația $t = x^2 + y^2$, combinația integrabilă se reduce la ecuația diferențială Bernoulli

$$\frac{dz}{dt} - \frac{1}{2t}z = \frac{1}{2} \frac{1}{z}.$$

Substituția $z^2 = u$ reduce această ecuație la ecuația diferențială liniară

$$u' - \frac{1}{t}u = 1,$$

care are soluția generală $u = tC_2 + t \ln t$.

Revenind la vechile variabile, găsim că cea de a doua integrală primă este

$$\frac{z^2 - (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = C_2.$$

Pentru a determina suprafața de câmp trebuie să găsim suprafața generată de curbele integrale ale sistemului simetric al liniilor de câmp care trebuie să se sprijine pe curba Γ . Se procedează ca la celelalte exerciții, se găsește relația de condiție

$$\frac{\frac{1}{C_1^4} - \left(1 + \frac{1}{C_1^2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{C_1^2}\right)}{1 + \frac{1}{C_1^2}} = C_2,$$

de unde, eliminând constantele arbitrare cu ajutorul integralelor prime, deducem că suprafața de câmp are ecuația

$$z^2 = \frac{y^4}{x^2} + 2(x^2 + y^2) \ln x.$$

4. Integralele prime ale sistemului simetric al liniilor de câmp sunt

$$\frac{x}{y} = C_1, \quad \frac{z}{y} - \frac{x}{y} \cos y = C_2$$

și ansamblul acestora reprezintă ecuațiile liniilor de câmp.

Relația de condiție este $C_1^2 \cos C_1 + C_2 = 0$, de unde deducem că suprafața de câmp care trece prin curba Γ are ecuația carteziană explicită

$$z = \frac{x^2}{y} \left(\cos y - \cos \frac{x}{y} \right).$$

■

3.4 Integrale cu vectori și câmpuri scalare

Sub această denumire se înțeleg diverse tipuri de integrale (definite sau Riemann, curbilinii, de suprafață, duble și triple) al căror integrand conține câmpuri vectoriale sau câmpuri scalare. Vom considera câmpuri vectoriale de forma $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$ sau de forma $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$, unde $D \subset \mathbb{R}^3$ este un domeniu și câmpuri scalare de forma $\varphi \in \mathcal{F}(D)$, toate satisfăcând condițiile cerute astfel încât integralele menționate mai sus să aibă sens. Vom prezenta pe scurt aceste tipuri de integrale.

3.4.1 Integrale curbilinii

Fie AB o curbă în domeniul D care satisface *condițiile de regularitate* până la ordinul care va fi necesar. O curbă care satisface condițiile de regularitate se numește *curbă netedă*. Condițiile de regularitate asigură existența tangentei în orice punct al ei, care variază continuu odată cu punctul curbei. Dacă A coincide cu B , curba corespunzătoare se numește *închisă*. Curba se zice *orientată* dacă s-a precizat un *sens de parcurs* pe ea.

Integrala curbilinie pe curba AB a câmpului vectorial $\mathbf{v}(P)$ sau a câmpului scalar $\varphi(P)$ este una din următoarele:

$$\int_{AB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}; \quad \int_{AB} \mathbf{v} \times d\mathbf{r}; \quad \int_{AB} \varphi d\mathbf{r}, \quad (3.48)$$

unde $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ este diferențiala vectorului de poziție $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Având în vedere expresiile analitice ale produselor de vectori, integralele curbilinii menționate în (3.48) se exprimă după cum urmează:

$$\begin{aligned} \int_{AB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{AB} v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz; \\ \int_{AB} \mathbf{v} \times d\mathbf{r} &= \mathbf{i} \int_{AB} v_2 dz - v_3 dy + \mathbf{j} \int_{AB} v_3 dx - v_1 dz + \mathbf{k} \int_{AB} v_1 dy - v_2 dx; \\ \int_{AB} \varphi(x, y, z) d\mathbf{r} &= \mathbf{i} \int_{AB} \varphi(x, y, z) dx + \mathbf{j} \int_{AB} \varphi(x, y, z) dy + \mathbf{k} \int_{AB} \varphi(x, y, z) dz. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Integralele curbilinii care apar în membrul al doilea în oricare din relațiile de mai sus au forma generală

$$I = \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

La studiul integralelor curbilinii de speța a doua s-a specificat faptul că dacă $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$ reprezintă un câmp de forțe pe D , integrala curbilinie (3.49) este *lucrul mecanic* al forței $\mathbf{v}(P)$ când P parcurge curba AB .

Integrala curbilinie (3.49) se mai numește *integrală de linie* a vectorului $\mathbf{v}(P)$. Integrala de linie pe curba închisă (C) , parcursă o singură dată, se numește *circulația* vectorului $\mathbf{v}(P)$ pe curba (C) .

Integralele de linie au următoarele proprietăți:

$$\begin{aligned} \int_{AB} (\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) \cdot d\mathbf{r} &= \lambda \int_{AB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \mu \int_{AB} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r}; \\ \int_{AB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{AP} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \int_{PB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}, \quad P \in (AB), \quad AP \cup PB = AB; \\ \left| \int_{AB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \right| &\leq \int_{AB} |\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}| \leq \int_{AB} \|\mathbf{v}\| ds \leq M \int_{AB} ds = M \cdot L; \\ \int_{AB} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} &= \left(\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right)(x_0, y_0, z_0) \cdot L, \end{aligned} \quad (3.50)$$

unde: λ și μ sunt scalari arbitrari; L este lungimea arcului AB ; M este valoarea maximă a normei vectorului $\mathbf{v}(P)$ pe arcul (AB) ; $Q(x_0, y_0, z_0)$ este un punct determinat pe arcul de curbă (AB) .

Proprietatea (3.50) este o teoremă de medie analoagă primei teoreme de medie de la integrala definită.

Celelalte tipuri de integrale curbilinii din (3.48) au proprietăți similare.

Fie câmpul vectorial continuu $\mathbf{v} \in C(D, \mathbb{R}^3)$.

Definiția 3.4.1. Integrala curbilinie $I = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ se numește **independentă de drum** pe domeniul $D \subset \mathbb{R}^3$ dacă oricare ar fi punctele $M_1, M_2 \in D$ și oricare ar fi arcele de curbă $(M_1\alpha M_2)$ și $(M_1\beta M_2)$, ambele incluse în D și cu sensurile de parcurs de la M_1 către M_2 , avem

$$\int_{M_1\alpha M_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_1\beta M_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

Teorema 3.4.1. *Integrala curbilinie $I = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ este independentă de drum pe D dacă și numai dacă $I = 0$ oricare ar fi curba închisă netedă sau netedă pe porțiuni $(C) \subset D$.*

Demonstrație. Dacă $M_1, M_2 \in D$ sunt puncte arbitrare și $(M_1 \alpha M_2) \subset D$, $(M_1 \beta M_2) \subset D$ sunt arce arbitrare, netede pe porțiuni, atunci curba $(M_1 \alpha M_2 \beta M_1)$ este închisă și netedă pe porțiuni și, reciproc, fiind dată o curbă orientată închisă, netedă pe porțiuni, $(C) \subset D$ și $M_1, M_2 \in (C)$ două puncte alese arbitrar, curba C se prezintă ca o juxtapunere de două arce netede pe porțiuni. Din aceste afirmații și Definiția 3.4.1 rezultă concluzia teoremei. **q.e.d.**

3.4.2 Integrale de suprafață

Domeniul pe care se efectuează integrarea este o porțiune de suprafață (Σ) de ecuație vectorială

$$(\Sigma) : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in (\Delta \cup \gamma) \subset \mathbb{R}^2, \quad (3.51)$$

unde Δ este un domeniu plan iar frontiera acestuia γ este o curbă netedă închisă. Fie (C) frontiera suprafeței (Σ) . Această curbă este corespunzătoare prin transformarea (3.51) a curbei închise γ .

Presupunem că suprafața (Σ) este *netedă*, ceea ce înseamnă că admite *plan tangent* în fiecare punct al ei, care variază continuu odată cu punctul suprafeței. Prin urmare, există și sunt continue pe Δ derivatele parțiale

$$\mathbf{r}_u(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v), \quad \mathbf{r}_v(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v), \quad (u, v) \in \Delta,$$

care satisfac condiția de regularitate $\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) \neq \mathbf{0}$.

În aceste condiții, funcția

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)}{\|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\|} = n_1 \mathbf{i} + n_2 \mathbf{j} + n_3 \mathbf{k}$$

este *versorul normalei* în punctul $M \in (\Sigma)$ corespunzător punctului $(u, v) \in \Delta$, iar n_1, n_2, n_3 sunt *cosinusurile directe* ale acestui versor.

După același criteriu ca și la integrale curbilinie, introducem următoarele integrale de suprafață de speța întâi:

$$\iint_{(\Sigma)} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) d\sigma; \quad \iint_{(\Sigma)} (\mathbf{n} \times \mathbf{w}) d\sigma; \quad \iint_{(\Sigma)} \varphi \mathbf{n} d\sigma, \quad (3.52)$$

unde $d\sigma$ este elementul de arie al suprafeței (Σ) .

În cazul când suprafața este dată prin ecuația vectorială (3.51), expresia elementului de arie $d\sigma$ este

$$d\sigma = \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} du dv,$$

unde $E(u, v)$, $F(u, v)$ și $G(u, v)$ sunt coeficienții lui Gauss²:

$$E(u, v) = \mathbf{r}_u^2(u, v); \quad F(u, v) = \mathbf{r}_u(u, v) \cdot \mathbf{r}_v(u, v); \quad G(u, v) = \mathbf{r}_v^2(u, v).$$

Integralele de suprafață cu vectori din (3.52) se calculează după cum urmează:

$$\iint_{(\Sigma)} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) d\sigma = \iint_{\Delta} (n_1 w_1 + n_2 w_2 + n_3 w_3) \sqrt{EG - F^2} du dv;$$

²Gauss, Johann Carl Friederich (1777 – 1855), om de știință și matematician german cu contribuții semnificative în domeniile: teoria numerelor; statistică matematică; analiză matematică; geometrie diferențială; geodezie; geofizică; electrostatică; astronomie; și optică.

$$\iint_{(\Sigma)} (\mathbf{n} \times \mathbf{w}) d\sigma = \mathbf{i} \iint_{(\Sigma)} (n_2 w_3 - n_3 w_2) d\sigma + \mathbf{j} \iint_{(\Sigma)} (n_3 w_1 - n_1 w_3) d\sigma + \mathbf{k} \iint_{(\Sigma)} (n_1 w_2 - n_2 w_1) d\sigma; \quad (3.53)$$

$$\iint_{(\Sigma)} \varphi \mathbf{n} d\sigma = \mathbf{i} \iint_{(\Sigma)} n_1 \varphi d\sigma + \mathbf{j} \iint_{(\Sigma)} n_2 \varphi d\sigma + \mathbf{k} \iint_{(\Sigma)} n_3 \varphi d\sigma. \quad (3.54)$$

Integralele din membrul doi al egalităților (3.53) și (3.54) se reduc la integrale duble pe Δ conform formulei de calcul a unei integrale de suprafață de speța întâi [13].

Definiția 3.4.2. O expresie de forma $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})d\sigma$ se numește **flux elementar** al câmpului vectorial \mathbf{w} prin elementul orientat de suprafață $\mathbf{n}d\sigma$, iar integrala de suprafață de speța întâi $\iint_{\Sigma} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) d\sigma$ se numește **fluxul total** al câmpului \mathbf{w} prin suprafața (Σ) .

Proprietățile integralelor de suprafață (3.52) sunt analoge celor prezentate pentru integrale curbilinii. Prin urmare, avem

$$\iint_{(\Sigma)} \mathbf{n} \cdot (\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) d\sigma = \lambda \iint_{(\Sigma)} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) d\sigma + \mu \iint_{(\Sigma)} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) d\sigma; \quad (3.55)$$

$$\iint_{(\Sigma)} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) d\sigma = \iint_{(\Sigma_1)} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) d\sigma + \iint_{(\Sigma_2)} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) d\sigma; \quad (3.56)$$

$$\left| \iint_{(\Sigma)} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) d\sigma \right| \leq \iint_{(\Sigma)} |(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})| d\sigma \leq \iint_{(\Sigma)} \|\mathbf{w}\| d\sigma \leq M \iint_{(\Sigma)} d\sigma = M A_{\Sigma}; \quad (3.57)$$

$$\iint_{(\Sigma)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} d\sigma = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})(x_0, y_0, z_0) A_{\Sigma}, \quad (3.58)$$

unde: λ și μ sunt scalari arbitrari; Σ_1 și Σ_2 sunt submulțimi ale suprafeței Σ pentru care $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$; A_{Σ} este aria suprafeței (Σ) ; M este valoarea maximă a normei vectorului $\mathbf{w}(P)$ pe suprafața (Σ) ; $Q(x_0, y_0, z_0)$ este un punct determinat al suprafeței Σ .

Proprietatea (3.58) este o teoremă de medie analogă primei teoreme de medie din teoria integralelor definite.

Celelalte integrale de suprafață din (3.52) au proprietăți asemănătoare celor prezentate în (3.55) – (3.57).

Este posibil ca suprafața netedă (Σ) să fie reprezentată cartezian explicit prin ecuația

$$(\Sigma): \quad z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad (3.59)$$

caz în care, elementul de arie $d\sigma$ al suprafeței are forma

$$d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy,$$

unde

$$p = p(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y), \quad q = q(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}(x, y),$$

iar versorul normalei \mathbf{n} la fața superioară a suprafeței are expresia analitică

$$\mathbf{n} = -\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \mathbf{i} - \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \mathbf{k}. \quad (3.60)$$

În cazul menționat de (3.59) și (3.60), reducerea unei integrale de suprafață $\iint_{(\Sigma)} \varphi(x, y, z) d\sigma$ la o integrală dublă se face cu ajutorul formulei de calcul

$$\iint_{(\Sigma)} \varphi(x, y, z) d\sigma = \iint_D \varphi(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy. \quad (3.61)$$

Folosind (3.59) – (3.61) se pot transpune cu ușurință toate rezultatele stabilite în cazul când suprafața (Σ) este dată prin ecuația vectorială (3.51). Pentru aceasta trebuie efectuată schimbarea de variabile $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ în integrala dublă (3.61).

Afirmații asemănătoare au loc și atunci când suprafața (Σ) este dată implicit printr-o ecuație de forma $F(x, y, z) = 0$. Astfel,

$$p = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad q = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

iar versorul normalei la suprafața (Σ) în punctul $P(x, y, z) \in (\Sigma)$ este

$$\mathbf{n}(P) = \frac{(\nabla F)(x, y, z)}{\|(\nabla F)(x, y, z)\|}.$$

3.4.3 Integrale triple (de volum)

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu carabil, deci o mulțime care are volum. Elementul de volum, notat cu $d\omega$, are expresia $d\omega = dx dy dz$.

Integralele de volum sau triple care ne vor interesa sunt:

$$\iiint_{\Omega} \varphi d\omega; \quad \iiint_{\Omega} \mathbf{v} d\omega. \quad (3.62)$$

Prima din integralele (3.62) a fost studiată arătându-se că, în anumite ipoteze asupra domeniului Ω , ea se reduce la o iterație de integrale simple. De exemplu, dacă Ω este un *domeniu simplu* în raport cu axa Oz iar proiecția sa pe planul xOy este un domeniu simplu în raport cu axa Oy , atunci

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}.$$

Astfel,

$$\iiint_{\Omega} \varphi d\omega = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \varphi(x, y, z) dz.$$

A doua integrală (3.62) se reduce la calculul a trei integrale de tipul celei precedente,

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{v} d\omega = \mathbf{i} \iiint_{\Omega} v_1 d\omega + \mathbf{j} \iiint_{\Omega} v_2 d\omega + \mathbf{k} \iiint_{\Omega} v_3 d\omega,$$

fiecareia din integralele membrului drept urmând să i se aplice o formulă de calcul.

Prezentăm, fără demonstrație, unele proprietăți ale integralelor triple:

$$\iiint_{\Omega} (\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) d\omega = \lambda \iiint_{\Omega} \mathbf{v} d\omega + \mu \iiint_{\Omega} \mathbf{w} d\omega;$$

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{v} d\omega = \iiint_{\Omega_1} \mathbf{v} d\omega + \iiint_{\Omega_2} \mathbf{v} d\omega;$$

$$\left| \iiint_{\Omega} \mathbf{v}(P) d\omega \right| \leq \iiint_{\Omega} \|\mathbf{v}(P)\| d\omega \leq M \iiint_{\Omega} d\omega = M \text{Vol}(\Omega),$$

unde Ω_1, Ω_2 sunt astfel încât $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$, $\text{Int } \Omega_1 \cap \text{Int } \Omega_2 = \emptyset$, $M = \max_{P \in \Omega} \|\mathbf{v}(P)\|$ și $\text{Vol}(\Omega)$ este volumul domeniului Ω .

3.4.4 Formula integrală Gauss–Ostrogradski. Consecințe

Să considerăm domeniul tridimensional V a cărui frontieră este suprafața închisă netedă S și fie (x_1, x_2, x_3) coordonatele carteziene ale unui punct oarecare $P \in V \cup S$. Suprafața S fiind netedă, în fiecare punct $P \in S$ există versorul $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ al normalei exterioare. Astfel, avem un câmp vectorial definit în punctele P ale suprafeței care depinde de variabila vectorială $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$.

Considerăm $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{F}(V \cup S, \mathbb{R}^3)$ un câmp vectorial continuu pentru care coordonata v_i are derivata parțială $v_{i,i}$ continuă în V .

În aceste ipoteze are loc *formula integrală Gauss–Ostrogradski*³

$$\iint_S (n_1 v_1 + n_2 v_2 + n_3 v_3) d\sigma = \iiint_V (v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3}) d\omega, \quad (3.63)$$

care se poate scrie și în forma

$$\iint_S \sum_{i=1}^3 n_i v_i d\sigma = \iiint_V \sum_{i=1}^3 v_{i,i} d\omega. \quad (3.64)$$

În particular, considerând pe rând: $v_1 = 1, v_2 = 0, v_3 = 0$; $v_1 = 0, v_2 = 1, v_3 = 0$; $v_1 = 0, v_2 = 0, v_3 = 1$, formula (3.63) devine:

$$\iint_S n_1 d\sigma = 0; \quad \iint_S n_2 d\sigma = 0; \quad \iint_S n_3 d\sigma = 0. \quad (3.65)$$

Relațiile (3.65) pot fi scrise unitar în forma

$$\iint_S \mathbf{n} d\sigma = \mathbf{0}.$$

Dacă alegem succesiv pentru câmpul vectorial \mathbf{v} una din următoarele expresii analitice:

$$(x_1, 0, 0); \quad (0, x_1, 0); \quad (0, 0, x_1);$$

$$(x_2, 0, 0); \quad (0, x_2, 0); \quad (0, 0, x_2);$$

$$(x_3, 0, 0); \quad (0, x_3, 0); \quad (0, 0, x_3),$$

³Ostrogradski, Mihail Vasilevici (1801 – 1862), matematician și fizician rus, născut în Ucraina. A fost discipol al lui Leonhard Euler. Este considerat unul din cei mai importanți matematicieni ai Rusiei Țariste.

din (3.64) obținem

$$\begin{aligned} \iint_S n_1 x_1 d\sigma &= \text{vol}(V); & \iint_S n_2 x_1 d\sigma &= 0; & \iint_S n_3 x_1 d\sigma &= 0; \\ \iint_S n_1 x_2 d\sigma &= 0; & \iint_S n_2 x_2 d\sigma &= \text{vol}(V); & \iint_S n_3 x_2 d\sigma &= 0; \\ \iint_S n_1 x_3 d\sigma &= 0; & \iint_S n_2 x_3 d\sigma &= 0; & \iint_S n_3 x_3 d\sigma &= \text{vol}(V). \end{aligned}$$

Aceste relații pot fi scrise concentrat în forma

$$\iint_S n_i x_j d\sigma = \delta_{ij} \text{vol}(V), \quad (3.66)$$

unde indicii i și j iau oricare din valorile 1, 2, 3, δ_{ij} este simbolul Kronecker⁴ ($\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$, dacă $i \neq j$), iar $\text{vol}(V)$ este volumul domeniului V .

Din (3.66) se pot deduce relațiile

$$\iint_S x_1 \mathbf{n} d\sigma = \text{vol}(V) \mathbf{i}; \quad \iint_S x_2 \mathbf{n} d\sigma = \text{vol}(V) \mathbf{j}; \quad \iint_S x_3 \mathbf{n} d\sigma = \text{vol}(V) \mathbf{k}. \quad (3.67)$$

3.4.5 Câmp potențial

Definiția 3.4.3. Un câmp vectorial continuu $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$ se numește **câmp potențial** dacă există câmpul scalar $\varphi \in C^1(D)$, numit **potențialul scalar** al câmpului vectorial \mathbf{v} , astfel încât

$$\mathbf{v}(M) = (\nabla \varphi)(M), \quad (\forall) M \in D.$$

Definiția 3.4.4. Un câmp de forțe $\mathbf{F} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$ se numește **câmp conservativ de forțe** dacă există câmpul scalar $U \in C^1(D)$, numită **funcție de forță**, astfel încât $\mathbf{F} = \nabla U$.

Exemplul 3.4.1. Câmpul gravitațional este un câmp conservativ de forțe.

Soluție. Într-adevăr, să presupunem că originea reperului $Oxyz$ este în centrul pământului. Se știe că forța \mathbf{F} cu care este atras de către pământ un punct material $M(\mathbf{r})$ este

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{C}{r^3} \mathbf{r},$$

unde C este o constantă, iar r este mărimea vectorului de poziție \mathbf{r} a punctului M . Deoarece:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{x}{r^3}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{y}{r^3}; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{z}{r^3},$$

⁴Kronecker, Leopold (1823 - 1891), matematician german, printre contribuțiile importante ale sale numărându-se lema lui Kronecker, produsul lui Kronecker, delta lui Kronecker și teorema lui Kronecker.

rezultă că putem reprezenta câmpul gravitațional \mathbf{F} în forma

$$\mathbf{F}(M) = (\nabla U)(M),$$

unde $U(M) = C/r$.

Prin urmare, câmpul vectorial \mathbf{F} este un câmp conservativ de forțe pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. ■

Teorema 3.4.2. Fie câmpul vectorial $\mathbf{v} \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$, unde D este un domeniu tridimensional.

Următoarele afirmații sunt echivalente:

- \mathbf{v} este un câmp potențial;
- integrala curbilinie $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ este independentă de drum pe D ;
- expresia diferențială $\omega = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ este o diferențială totală pe D .

Demonstrație. Faptul că prima afirmație implică celelalte două este evident.

Să presupunem că $\omega = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ este diferențială totală pe D . Atunci există funcția U diferențiabilă pe D astfel încât $\omega = dU = (\nabla U) \cdot (d\mathbf{r})$ din care deducem că

$$\int_{AB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} dU = U(B) - U(A)$$

și deci integrala curbilinie depinde doar de extremitățile A și B ale curbei (C). Din $\omega = (\nabla U) \cdot (d\mathbf{r}) = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ și unicitatea expresiei diferențialei unei funcții obținem $\mathbf{v} = \nabla U$, ceea ce arată că \mathbf{v} este un câmp potențial. Așadar, prima afirmație este implicată de ultima.

Dacă integrala curbilinie $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ este independentă de drum pe D , considerând arcul de curbă $AM \subset D$ cu extremitatea A fixă și cealaltă extremitate M variabilă, funcția $U(M) = \int_{AM} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ are proprietatea $\nabla U = \mathbf{v}$, adică \mathbf{v} este un câmp potențial. q.e.d.

3.5 Divergența unui câmp vectorial

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu având ca frontieră suprafața închisă netedă sau netedă pe porțiuni Σ și $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(\Omega \cup \Sigma, \mathbb{R}^3)$ un câmp vectorial continuu pe $\Omega \cup \Sigma$, diferențiabil în orice punct $M(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$.

Considerând un punct $P_0 \in \Omega$, de vector de poziție $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$, există domenii $V \subset \Omega$ astfel încât $P_0 \in V$. Presupunem că frontiera unui astfel de domeniu V este o suprafață închisă netedă S . Fie $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ versorul normalei exterioare într-un punct oarecare $P \in S$ de vector de poziție $\overrightarrow{OP} = \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Fie $\delta(V)$ diametrul mulțimii V , adică maximul distanței dintre două puncte oarecare $M, Q \in V$. Presupunem că domeniul V are volum și că $\text{vol}(V)$ este volumul său.

Cu aceste pregătiri, considerăm raportul

$$\frac{\Phi}{\text{vol}(V)} = \frac{\iint_S (\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})) d\sigma}{\text{vol}(V)}, \quad (3.68)$$

dintre fluxul Φ al câmpului vectorial \mathbf{v} prin suprafața S și $\text{vol}(V)$.

Definiția 3.5.1. Se numește **divergența** câmpului vectorial \mathbf{v} , în punctul P_0 , notată $(\text{div } \mathbf{v})(P_0)$ sau $(\nabla \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x}_0)$, limita raportului (3.68) atunci când diametrul domeniului V tinde la zero, adică

$$\lim_{\delta(V) \rightarrow 0} \frac{\iint_S (\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})) d\sigma}{\text{vol}(V)} = (\text{div } \mathbf{v})(P_0) = (\nabla \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x}_0). \quad (3.69)$$

Teorema 3.5.1. Dacă $\mathbf{v} = \mathbf{v}(P)$ este câmp vectorial diferențiabil în $\mathbf{x}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ și există constantele pozitive k_1 și k_2 astfel încât:

$$\text{aria}(S) \leq k_1 \delta^2(V); \quad \text{vol}(V) \geq k_2 \delta^3(V), \quad (3.70)$$

atunci limita (3.69) există și

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}(\mathbf{x}_0). \quad (3.71)$$

Demonstrație. Din ipoteza diferențiabilității funcției vectoriale \mathbf{v} de argument vectorial în punctul $\mathbf{x}_0 \in D$ rezultă că are loc identitatea

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|, \quad (3.72)$$

unde $d\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = (d\mathbf{v})(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = (\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}) \left(J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix} \right)$ este valoarea în $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = (\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}) \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix}$ a diferențialei funcției \mathbf{v} în punctul $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}) X_0$, $J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) \right\|_{3 \times 3}$ este matricea jacobiană a funcției $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ în punctul \mathbf{x}_0 , iar $\boldsymbol{\alpha}$ este o funcție vectorială definită pe \mathbb{R}^3 cu proprietatea

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \quad (3.73)$$

În aceste relații, $X - X_0$ și X_0 reprezintă matricea cu trei linii și o coloană a coordonatelor vectorilor $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ și respectiv \mathbf{x}_0 în baza formată de versorii ortogonali $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ care, împreună cu originea O , constituie reperul cartezian ortogonal $Ox_1x_2x_3$.

Dacă înmulțim ambii membri ai relației (3.72) cu $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, integrăm pe suprafața S , ținem cont de relațiile (3.66) și (3.67) și împărțim cu $\text{vol}(V)$, se obține

$$\frac{\iint_S \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\sigma}{\text{vol}(V)} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)(\mathbf{x}_0) + \frac{\iint_S \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| (\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) d\sigma}{\text{vol}(V)}. \quad (3.74)$$

Trecem în membrul întâi primul termen al membrului doi din (3.74) și apoi luăm valoarea absolută. A doua ipoteză (3.70), faptul că $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \delta(V)$ și inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz

$$|\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)| \leq \|\mathbf{n}(\mathbf{x})\| \|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| = \|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|,$$

conduc la

$$\left| \frac{\iint_S \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\sigma}{\text{vol}(V)} - \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)(\mathbf{x}_0) \right| \leq \frac{\iint_S \|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| d\sigma}{k_2 \delta^2(V)}. \quad (3.75)$$

Însă, din (3.73) rezultă că funcția α este continuă în $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ceea ce atrage că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\mu(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$\|\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| \leq \frac{k_2}{k_1} \varepsilon, \quad (3.76)$$

oricare ar fi $\mathbf{x} \in S$ care satisface inegalitatea

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \mu(\varepsilon).$$

Putem considera că domeniul $V \subset \Omega$ ce conține punctul \mathbf{x}_0 este astfel ales încât $\delta(V) \leq \mu(\varepsilon)$. În acest caz, din (3.70), (3.75), (3.76) rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\mu(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi domeniul V cu $\delta(V) < \mu$ avem

$$\left| \frac{\iint_S \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\sigma}{\text{vol}(V)} - \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) (\mathbf{x}_0) \right| < \varepsilon,$$

ceea ce conduce la relația

$$\lim_{\delta(V) \rightarrow 0} \frac{\iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\sigma}{\text{vol}(V)} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) (\mathbf{x}_0). \quad (3.77)$$

Din (3.69) și (3.77) rezultă (3.71).

q.e.d.

Demonstrația acestei teoreme nu ar fi fost posibilă fără inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz [8].^{5 6} Deoarece divergența câmpului vectorial $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ într-un punct oarecare $M \in \Omega$ este

$$(\text{div } \mathbf{v})(x, y, z) = \frac{\partial v_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial v_3}{\partial z}(x, y, z), \quad (3.78)$$

analizând (3.78), constatăm că în membrul al doilea este rezultatul înmulțirii scalare a operatorului diferențial al lui Hamilton

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

cu vectorul \mathbf{v} și deci notația $\nabla \cdot \mathbf{v}$ pentru divergența câmpului vectorial \mathbf{v} este justificată.

Definiția 3.5.2. Un câmp vectorial $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$, diferențiabil în domeniul D , se numește **solenoidal** dacă $\text{div } \mathbf{v} = 0$.

3.6 Rotorul unui câmp vectorial

Să considerăm o direcție arbitrară de versor \mathbf{a} și fie (II) planul perpendicular pe versorul \mathbf{a} care trece printr-un punct fixat $P_0 \in \Omega$. În acest plan considerăm o curbă simplă închisă (C) care înconjoară punctul P_0 . Curbă (C) delimitează o porțiune (S) de suprafață plană, a cărei arie o notăm tot cu S . Fie $\delta(S)$ diametrul mulțimii (S).

⁵Schwarz, Karl Herman Amandus (1843 – 1921), matematician german.

⁶Buniakowski, Viktor Iakovlevici (1804 – 1889), matematician rus, membru și apoi vicepreședinte al Academiei de Științe din Sankt Petersburg. În 1826 Buniakowski obține o bursă la Paris avându-l ca profesor pe Cauchy. Buniakovski a publicat peste 150 lucrări din diverse domenii ale matematicii (în special teoria numerelor, teoria probabilităților), precum și mecanică. În 1846 publică un tratat de teoria probabilităților, în care sunt prezentate realizările în domeniu ale lui Siméon Denis Poisson și Pierre-Simon Laplace. În 1875 s-a instituit "Premiul Buniakovski" pentru matematicieni. În alte lucrări ulterioare se ocupă de statistica demografică, de determinarea erorilor de observație și alte probleme similare. În ceea ce privește teoria numerelor, dă o nouă demonstrație legii reciprocității pătratice. Dar cel mai celebru rezultat al său este cel din analiză matematică: inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz. Inegalitatea a fost publicată de Cauchy în 1821. În 1859 Buniakovski a reformulat-o pentru calculul integral. A tradus în limba rusă și a redactat multe din lucrările lui Cauchy.

Pentru a introduce rotorul unui câmp vectorial $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, plecăm de la circulația Γ a acestuia pe curba (C) și să calculăm limita

$$\lim_{\delta(S) \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{S} = \lim_{\delta(S) \rightarrow 0} \frac{\int_C \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{r}}{S}.$$

În acest scop, transformăm raportul Γ/S într-un raport dintre un flux pe o suprafață închisă (S) și volumul domeniului V închis de această suprafață, reducând astfel problema la cea prezentată în paragraful precedent. Pentru aceasta, considerăm porțiunea din suprafața cilindrică, cu generatoarele paralele cu \mathbf{a} , de înălțime constantă h și având una din baze porțiunea de suprafață (S) .

Notăm cu (S_1) cealaltă bază a cilindrului, cu (S_ℓ) suprafața laterală a sa, iar cu $d\sigma_\ell$ elementul de arie al suprafeței (S_ℓ) .

Având în vedere că $d\mathbf{r} = \boldsymbol{\tau} ds$ și că $h \cdot ds = d\sigma_\ell$, rezultă că

$$\frac{\Gamma}{S} = \frac{h \cdot \int_C \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{r}}{h \cdot S} = \frac{\iint_{S_\ell} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} d\sigma_\ell}{\text{vol}(V)}, \quad (3.79)$$

unde $\boldsymbol{\tau}$ este versorul tangentei la curba (C) orientat astfel încât să fie compatibil cu orientarea suprafeței (S) . Însă $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{a} și \mathbf{n}_ℓ (normala exterioară la suprafața laterală a cilindrului) formează un triedru drept astfel că $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{a} \times \mathbf{n}_\ell$. Atunci, (3.79) devine

$$\frac{\Gamma}{S} = \frac{\iint_{S_\ell} (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}_\ell d\sigma_\ell}{\text{vol}(V)}. \quad (3.80)$$

Deoarece integralele pe bazele cilindrului din integrantul care intră în (3.80) sunt nule, în baza celor deduse în paragraful precedent, rezultă că

$$\lim_{\delta(S) \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{S} = \lim_{\delta(V) \rightarrow 0} \frac{\iint_S (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} d\sigma}{\text{vol}(V)} = (\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{a}))(\mathbf{x}_0). \quad (3.81)$$

Dacă aplicăm formula de calcul a divergenței, găsim că limita din (3.81) se poate scrie ca produsul scalar dintre vectorul \mathbf{a} și un anumit vector $\mathbf{w}(\mathbf{x}_0)$

$$\lim_{\delta(S) \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{S} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}_0),$$

unde

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}_0) = (v_{3,2}(\mathbf{x}_0) - v_{2,3}(\mathbf{x}_0))\mathbf{i} + (v_{1,3}(\mathbf{x}_0) - v_{3,1}(\mathbf{x}_0))\mathbf{j} + (v_{2,1}(\mathbf{x}_0) - v_{1,2}(\mathbf{x}_0))\mathbf{k}.$$

Definiția 3.6.1. Vectorul $\mathbf{w}(\mathbf{x}_0)$ se numește **rotorul** câmpului vectorial \mathbf{v} în punctul \mathbf{x}_0 și se scrie:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}_0) = (\text{rot } \mathbf{v})(\mathbf{x}_0).$$

Dacă analizăm expresia rotorului vedem că aceasta se poate calcula cu ajutorul determinantului formal

$$(\text{rot } \mathbf{v})(\mathbf{x}_0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} (\mathbf{x}_0) = (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v})(\mathbf{x}_0).$$

Într-un punct oarecare \mathbf{x} , vom avea

$$(\nabla \times \mathbf{v})(\mathbf{x}) = (\text{rot } \mathbf{v})(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1(\mathbf{x}) & v_2(\mathbf{x}) & v_3(\mathbf{x}) \end{vmatrix}.$$

Definiția 3.6.2. Un câmp vectorial $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$, diferențiabil în domeniul D , se numește **irotațional** sau **lamelar** dacă $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Teorema 3.6.1. Un câmp potențial $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$, al cărui potențial $\varphi \in C^2(D)$, este lamelar.

Demonstrație. Într-adevăr, câmpul vectorial \mathbf{v} fiind potențial, $\mathbf{v}(M) = \text{grad } \varphi(M)$. Calculând rotorul acestui câmp, găsim

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3 \partial x_2} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \mathbf{k}.$$

Din faptul că $\varphi \in C^2(D)$, rezultă că derivatele parțiale mixte de ordinul doi ale sale sunt egale. Prin urmare, \mathbf{v} este câmp irotațional sau lamelar, adică $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. **q.e.d.**

3.7 Reguli de calcul cu operatorul lui Hamilton

O parte a acestor reguli au fost menționate în (3.29), unde operatorul ∇ s-a aplicat unor funcții scalare. Mai mult, gradientul poate fi aplicat unui produs scalar a două câmpuri vectoriale. Operatorul ∇ aplicat scalar unui câmp vectorial conduce la divergența acelu câmp, iar dacă ∇ se aplică vectorial unui câmp vectorial se obține rotorul acelu câmp, adică

$$\nabla \varphi = \text{grad } \varphi; \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = \text{div } \mathbf{u}; \quad \nabla \times \mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{v}.$$

În baza celor prezentate mai sus, se pot demonstra următoarele *formule de calcul cu operatorul* ∇ a lui Hamilton în care, pentru simplitate, renunțăm la scrierea variabilei vectoriale \mathbf{x} :

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{v};$$

$$\nabla \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \nabla \times \mathbf{u} + \nabla \times \mathbf{v};$$

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{u}) = \varphi (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot (\nabla \varphi);$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v});$$

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{u}) = \varphi (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \times (\nabla \varphi);$$

$$\nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v};$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v},$$

unde $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ este *operatorul diferențial al lui Laplace*⁷ sau *laplacian*.

Avem

$$\nabla^2 \varphi = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Ecuția cu derivate parțiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

se numește *ecuația lui Laplace*. Orice soluție a ecuației Laplace se numește *funcție armonică*.

Pentru alte operații cu operatorul ∇ , obținem:

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}; \quad (3.82)$$

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = \mathbf{0}; \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) = 0.$$

3.8 Formule integrale

Fie (Σ) o suprafață închisă ce mărginește domeniul Ω , care are următoarele proprietăți:

- o dreaptă paralelă la axele de coordonate ale reperului cartezian ortogonal $Oxyz$ intersectează suprafața (Σ) în cel mult două puncte;
- Ω se proiectează pe planul xOy după un domeniu D și cilindrul proiectant al lui Ω cu generatoarele paralele cu Oz este tangent la Ω în lungul unei curbe (Γ) care împarte (Σ) în două suprafețe (condiții analoage se pot pune și pentru planele yOz și zOx);
- suprafața (Σ) este cu două fețe și presupunem că este formată dintr-un număr de porțiuni netede.

Pentru astfel de suprafețe (Σ) și domeniile Ω mărginite de ele au loc următoarele formule integrale:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\omega; \quad (3.83)$$

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{n} \varphi \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{grad} \varphi \, d\omega; \quad (3.84)$$

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{n} \times \mathbf{v} \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{v} \, d\omega; \quad (3.85)$$

$$\iint_{\Sigma} \varphi \frac{d\psi}{d\mathbf{n}} \, d\sigma = \iiint_{\Omega} (\operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi + \varphi \nabla^2 \psi) d\omega; \quad (3.86)$$

⁷Laplace, Pierre – Simon (1749 – 1827), matematician și astronom francez a cărui operă a fost pivotul dezvoltării astronomiei matematice și statisticii matematice. A rezumat și extins opera predecesorilor săi în cele cinci volume de *Mecanică cerească*, editate între anii 1799 și 1825. Această operă translatează studiul geometric al mecanicii clasice spre unul fundamentat pe calculul diferențial, deschizând astfel un domeniu larg de probleme. În statistică, așa numita interpretare Bayesiană a probabilității a fost dezvoltată în principal de către Laplace. A formulat *ecuația lui Laplace* și a pus bazele *transformatei Laplace* care apare în multe domenii ale fizicii matematice, un domeniu al matematicii unde și-a adjudecat rolul de formator. *Operatorul diferențial al lui Laplace* este denumit astfel după numele său. Laplace a reformulat și dezvoltat ipoteza nebulară a originii sistemului solar și a fost unul din primii oameni de știință care a postulat existența găurilor negre. A introdus noțiunea de colaps gravitațional. Laplace este considerat unul din cei mai mari oameni de știință din toate timpurile, fapt ce i-a atras supranumele de Newton al Franței. A înțeles matematica mai bine decât oricare din contemporanii săi. A devenit conte al Primului Imperiu Francez în 1806 și a fost numit marchiz în 1817 de către Restaurația Bourbon.

$$\iint_{\Sigma} \left(\varphi \frac{d\psi}{d\mathbf{n}} - \psi \frac{d\varphi}{d\mathbf{n}} \right) d\sigma = \iiint_{\Omega} (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) d\omega. \quad (3.87)$$

Formula integrală (3.83) este forma vectorială a formulei Gauss–Ostrogradski (3.63), fiind adeseori întâlnită sub denumirea de *formula integrală a divergenței* sau *teorema divergenței*.

Identitatea (3.84) se numește *formula integrală a gradientului*.

Relației (3.85) i se poate spune *formula integrală a rotorului*.

Egalitatea (3.86) este cunoscută sub denumirea de *prima identitate integrală a lui Green*⁸.

Relația (3.87) este *a doua identitate integrală a lui Green*.

Observația 3.8.1. Identitățile lui Green pot fi considerate atât în spațiul afin \mathbb{E}^n , de dimensiune superioară lui 3, asociat spațiului Euclidian \mathbb{R}^n , cât și în planul afin \mathbb{E}^2 asociat spațiului Euclidian bidimensional \mathbb{R}^2 .

Dacă (S) este o porțiune de suprafață regulată orientabilă, având frontiera o curbă închisă rectificabilă (Γ) , iar câmpul vectorial $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ este diferențiable și $S \subset \Omega$, atunci are loc *formula integrală a lui Stokes*⁹

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{v} \, d\sigma. \quad (3.88)$$

Teorema 3.8.1. Câmpul vectorial $\mathbf{v} \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$ este irotațional pe domeniul simplu conex $D \subset \mathbb{R}^3$ dacă și numai dacă integrala curbilinie $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ este independentă de drum pe D .

Demonstrație. Presupunem $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$ și fie C o curbă închisă oarecare inclusă în D , iar $S \subset D$ o suprafață cu frontiera C . Aplicând formula integrală a lui Stokes (3.88), găsim $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0$. În baza Teoremei 3.4.1 rezultă că integrala curbilinie $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ este independentă de drum pe D .

Demonstrația reciprocei se face prin reducere la absurd. Presupunem că există un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ în care $\text{rot } \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ și fie că, în acest punct, $v_{2,1} - v_{1,2} = \mu > 0$. Atunci există o vecinătate a punctului M_0 , situată în planul $z = z_0$ și inclusă în D , în punctele căreia avem $v_{2,1} - v_{1,2} > 0$. Aplicând formula lui Stokes, în care porțiunea de suprafață este în vecinătatea de mai sus, găsim că pe frontiera acesteia, care este o curbă închisă din D , integrala curbilinie este diferită de zero. Dar acest lucru contrazice ipoteza. **q.e.d.**

Exercițiul 3.8.1. Se dă câmpul de forță definit pe \mathbb{R}^3

$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz(2x + y + z)\mathbf{i} + zx(x + 2y + z)\mathbf{j} + xy(x + y + 2z)\mathbf{k}.$$

Să se arate că acest câmp vectorial este irotațional și să se determine o funcție de forță.

⁸Green, George (1793 - 1841), matematician englez, inițiatorul fizicii matematice în Marea Britanie.

⁹Stokes, Sir George Gabriel (1819 - 1903), matematician și fizician englez care, la Universitatea Cambridge din Marea Britanie, a adus contribuții importante în: dinamica fluidelor, inclusiv ecuațiile Navier - Stokes; optică; și fizică matematică. A fost secretar și apoi președinte al Societății Regale a Regatului Unit al Marii Britanii și Irlanda.

Soluție Faptul că \mathbf{F} este câmp irotațional de forță este simplu de arătat.

În baza Teoremei 3.8.1, integrala curbilinie $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ este independentă de drum în \mathbb{R}^3 . Folosind Teorema 3.4.2, deducem că funcția de forță care se anulează în origine este $U(M) = \int_{OM} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Deoarece integrala curbilinie este independentă de drum, se poate integra de la O la $M(x, y, z)$ pe muchiile paralelipipedului cu fețele paralele cu axele de coordonate care are O și M ca vârfuri opuse. Atunci

$$U(M) = \int_0^x v_1(t, 0, 0)dt + \int_0^y v_2(x, t, 0)dt + \int_0^z v_3(x, y, t)dt.$$

Folosind coordonatele câmpului vectorial \mathbf{v} , rezultă că funcția de forță care se anulează în origine este $U(x, y, z) = \int_0^z xy(x + y + 2t)dt = xyz(x + y + z)$. ■

Exercițiul 3.8.2. Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial

$$\mathbf{w} = (-x + y + z)\mathbf{i} + (x - y + z)\mathbf{j} + (x + y - z)\mathbf{k}.$$

Arătați că \mathbf{w} este câmp conservativ și determinați-i funcțiile de forță. Calculați fluxul câmpului \mathbf{w} prin fața exterioară a suprafeței închise S de ecuație $|-x + y + z| + |x - y + z| + |x + y - z| = 1$.

Soluție. Sistemul diferențial al liniilor de câmp generează combinațiile integrabile

$$\frac{dx + dy + dz}{x + y + z} = \frac{dy - dx}{-2(y - x)} = \frac{dx + dy - 2dz}{-2(x + y - 2z)}$$

și liniile de câmp

$$\begin{cases} (x + y + z)^2(x + y - 2z) = C_1 \\ x + y - 2z = C_2(y - x). \end{cases}$$

Avem că $\nabla \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$ ceea ce arată că \mathbf{w} este un câmp conservativ.

Observând că expresia diferențială $\omega = \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r}$ este diferențiala funcției $-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + zx$, deducem că funcțiile de forță sunt $F(x, y, z) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + zx + \text{const.}$

Suprafața prin care se calculează fluxul este închisă, are opt fețe și limitează domeniul V . Folosind formula integrală Gauss–Ostrogradski, rezultă:

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = -3; \quad \Phi = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{w} dx dy dz = -3 \iiint_V dx dy dz.$$

Pentru calculul integralei triple efectuăm schimbarea de variabile

$$X = -x + y + z, \quad Y = x - y + z, \quad Z = x + y - z$$

pentru care $dx dy dz = \frac{1}{4} dX dY dZ$. Frontiera Σ a domeniului transformat V_1 are ecuația $|X| + |Y| + |Z| = 1$, este un octaedru și are volumul $4/3$. Rezultă $\Phi = -1$. ■

Exercițiul 3.8.3. Fie \mathbf{a} un versor constant, $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ un câmp vectorial de forma $\mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{a} \times \mathbf{u}(r)$ și Ω un domeniu tridimensional mărginit de suprafața închisă Σ , netedă pe porțiuni.

Să se arate că au loc relațiile:

1. $\iint_{\Sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma + \mathbf{a} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} d\omega = \iiint_{\Omega} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{a}} d\omega;$
2. $\iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \mathbf{a} \cdot \iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{u} d\omega = 0;$
3. $\iint_{\Sigma} \operatorname{div}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma + \mathbf{a} \times \iiint_{\Omega} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{u}) d\omega = - \iiint_{\Omega} \frac{d(\operatorname{rot} \mathbf{u})}{d\mathbf{a}} d\omega.$

Soluție. Utilizând formula integrală a rotorului (3.85), obținem

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma = - \iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{v} d\omega.$$

Înlocuind în membrul al doilea pe \mathbf{v} și ținând cont de formula (3.82), deducem

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma = - \iiint_{\Omega} [\mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{u}] d\omega.$$

Deoarece \mathbf{a} este versor constant, $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ și $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Prin urmare,

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma = -\mathbf{a} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} d\omega + \iiint_{\Omega} (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{u} d\omega.$$

Cu relația (3.47) avem $\iint_{\Sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma = -\mathbf{a} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} d\omega + \iiint_{\Omega} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{a}} d\omega$, de unde rezultă prima identitate.

Pentru a demonstra a doua identitate, aplicăm formula integrală Gauss–Ostrogradski (3.83). totodată și divergența produsului de vectori. Obținem

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u}) d\omega = -\mathbf{a} \cdot \iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{u} d\omega,$$

din care se deduce a doua identitate.

În mod analog, se demonstrează și cea de a treia identitate. ■

Exercițiul 3.8.4. Se consideră câmpul vectorial $\mathbf{w} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})$, unde \mathbf{a} este un versor constant și \mathbf{r} este vectorul de poziție al unui punct $M(x, y, z) \in \Omega$. Frontiera domeniului Ω este suprafața închisă orientabilă (Σ) cu proprietățile precizate la începutul paragrafului.

Să se arate că au loc relațiile:

$$\iint_{\Sigma} (\operatorname{div} \mathbf{w}) \mathbf{n} d\sigma = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{w} d\omega; \quad (3.89)$$

$$\iint_{\Sigma} (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{w}) d\sigma = 2 \iiint_{\Omega} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{w} d\omega. \quad (3.90)$$

Soluție. Calculând divergența câmpului vectorial \mathbf{w} , găsim

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = r^2 - 3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^2.$$

Aplicăm formula integrală a gradientului (3.84) în care $\varphi = \operatorname{div} \mathbf{w}$. Așadar, vom avea

$$\iint_{\Sigma} (\operatorname{div} \mathbf{w}) \mathbf{n} d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{w} d\omega.$$

Având în vedere expresia lui $\operatorname{div} \mathbf{w}$ și regulile de calcul cu gradientul, deducem $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{w} = 2[\mathbf{r} - 3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}]$. Pe de altă parte, $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{w} = 4[\mathbf{r} - 3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}]$, adică

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{w} = 2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{w} \quad (3.91)$$

și astfel egalitatea (3.89) este evidentă.

Pentru a demonstra relația (3.90) folosim formula integrală a rotorului (3.85) în care câmpul vectorial \mathbf{v} este înlocuit cu $\operatorname{rot} \mathbf{w}$. Prin urmare, avem

$$\iint_{\Sigma} (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{w}) d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{w} d\omega. \quad (3.92)$$

Dacă în relația (3.92) facem uz de (3.91) deducem că are loc și (3.90). ■

Exercițiul 3.8.5. Se consideră $\mathbf{v} = \varphi(r)\mathbf{r}$ un câmp vectorial definit pe un domeniu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ a cărui frontieră este suprafața închisă și netedă pe porțiuni (Σ). Presupunem că funcția φ este diferentiabilă pe un interval $I \subset \mathbb{R}_+$. Vectorul de poziție și mărimea razei vectoare ale punctului $M(x, y, z) \in \Omega \cup \Sigma$ sunt

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad r = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (3.93)$$

Să se arate că au loc identitățile:

$$\iint_{\Sigma} \varphi(r) \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} d\sigma - 3 \iiint_{\Omega} \varphi(r) d\omega = \iiint_{\Omega} \mathbf{r} \cdot \operatorname{grad} \varphi(r) d\omega; \quad (3.94)$$

$$\int_{\Gamma} \varphi(r) \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (3.95)$$

unde Γ este o curbă simplă închisă, netedă pe porțiuni, inclusă în domeniul închis $\Omega \cup \Sigma$, care este frontiera unei suprafețe deschise $S \subset \Omega \cup \Sigma$.

Soluție. Din (3.93) rezultă că expresia analitică a câmpului vectorial \mathbf{v} este

$$\mathbf{v} = x\varphi(r)\mathbf{i} + y\varphi(r)\mathbf{j} + z\varphi(r)\mathbf{k},$$

iar divergența lui, conform (3.78), este

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 3\varphi(r) + r\varphi'(r).$$

Formula integrală Gauss–Ostrogradski (3.83) conduce la

$$\iint_{\Sigma} \varphi(r) \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} d\sigma - 3 \iiint_{\Omega} \varphi(r) d\omega = \iiint_{\Omega} r\varphi'(r) d\omega. \quad (3.96)$$

Identitatea (3.94) rezultă din (3.96) deoarece $r\varphi'(r) = \mathbf{r} \cdot \operatorname{grad} \varphi(r)$.

Identitatea (3.95) rezultă din formula lui Stokes (3.88) aplicată câmpului vectorial \mathbf{v} , deoarece

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{rot} (\varphi(r)\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \quad \blacksquare$$

Capitolul 4

Ecuatii cu derivate parțiale de ordinul al doilea

4.1 Ecuatiile fizicii matematice

Pentru descrierea matematică a multor *fenomene fizice* este adesea necesară utilizarea derivatelor parțiale ale mărimilor variabile care descriu aceste fenomene. Uneori aceste derivate parțiale trebuie să satisfacă anumite ecuații care se numesc de obicei *ecuații ale fizicii matematice*.

Ecuatiile fizicii matematice sunt ecuații cu derivate parțiale, liniare sau nu, de ordinul al doilea sau de ordin superior care se întâlnesc în studiul matematic al unor *proces*e și/sau *fenomene din natură și societate*.

Astfel, în studiul *oscilațiilor unei coarde*, în *oscilațiile curentului electric într-un conductor*, în studiul *vibrațiilor gazelor* etc. se utilizează o ecuație cu derivate parțiale de forma

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(t, x), \quad a \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

pe care o putem numi *ecuația coardei vibrante*.

În studiul micilor *vibrații ale unei membrane* se utilizează o ecuație de forma

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(t, x, y), \quad a \in \mathbb{R}, \quad (4.2)$$

numită *ecuația propagării undelor cilindrice*.

În studiul propagării sunetului în spațiul cu trei dimensiuni \mathbb{R}^3 se utilizează o ecuație de forma

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = F(t, x, y, z), \quad a \in \mathbb{R}, \quad (4.3)$$

care se numește *ecuația propagării undelor sferice*.

Cel mai adesea, fiecare dintre ecuațiile (4.1) – (4.3) poartă denumirea de *ecuația neomogenă a propagării undelor* sau pe scurt *ecuația undelor*.

În procese de *difuzie a căldurii*, de *filtrație* a lichidelor sau gazelor prin *medii poroase* se utilizează una dintre ecuațiile:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(t, x), \quad a \in \mathbb{R}; \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(t, x, y), \quad a \in \mathbb{R}; \quad (4.5)$$

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = F(t, x, y, z), \quad a \in \mathbb{R}, \quad (4.6)$$

denumită respectiv *ecuația propagării căldurii* în una, două sau trei dimensiuni.

Dacă în relațiile (4.1) – (4.6) funcția F corespunzătoare este nulă, ecuația respectivă se numește în plus *omogenă*.

Fenomenele electrodinamice sunt descrise de ecuațiile lui Maxwell; acestea sunt:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{I} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{I}^e; \\
 2) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\
 3) \quad \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; \\
 4) \quad \operatorname{div} \mathbf{D} &= -4\pi\rho; \\
 5) \quad \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}; \\
 6) \quad \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}; \\
 7) \quad \mathbf{I} &= \sigma \mathbf{E},
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

unde \mathbf{E} este câmpul electric, \mathbf{H} este câmpul magnetic, \mathbf{D} este vectorul de deplasare a lui Maxwell, \mathbf{B} este vectorul inducției magnetice, \mathbf{I} este densitatea de volum a curenților, \mathbf{I}^e este vectorul densității de curent generat de forțele electrodinamice aplicate, ρ este densitatea maselor electrice, ε este constanta dielectrică a mediului, μ este permeabilitatea magnetică, σ este conductibilitatea mediului, c este viteza luminii, considerată constantă.

Din aceste ecuații se deduc altele, utile pentru aplicații. De exemplu, aplicând operatorul $\frac{\partial}{\partial t}$ în ambii membri ai ecuației 4) și folosind 1), precum și relația $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$, obținem

$$c \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\mathbf{I} + \mathbf{I}^e) = 0.$$

În anumite condiții restrictive, sistemul (4.7) se poate simplifica. Prezentăm două astfel de simplificări.

1. În cazul fenomenelor electromagnetice în vid ($\mu = \varepsilon = 0$, $\sigma = 1$, și în plus $\mathbf{I}^e = 0$), sistemul (4.7) devine:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \tag{4.8}$$

În obținerea acestor ecuații s-a ținut cont de faptul că $\mathbf{I} = 0$, $\mathbf{D} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{H}$.

Aplicând în prima ecuație din (4.8) operatorul $\frac{\partial}{\partial t}$ și ținând seama de a doua, obținem identitatea

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \tag{4.9}$$

Dar,

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} + \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{E}), \tag{4.10}$$

unde $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ este operatorul lui Laplace în trei dimensiuni.

Folosind ultima relație (4.8), din (4.9) și (4.10) obținem

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \tag{4.11}$$

cu alte cuvinte componentele lui \mathbf{E} verifică o ecuație de forma $\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, care se numește *ecuația propagării undelor sferice* sau *ecuația propagării undelor*.

2. Considerând cazul când $\mathbf{I}^e = 0$, $\varepsilon = \text{const.}$, $\mu = \text{const.}$, $\sigma = \text{const.}$ constatăm că, [22] p. 55, \mathbf{H} și \mathbf{E} satisfac ecuațiile cu derivate parțiale de ordinul al doilea:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}; \tag{4.12}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi \sigma \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \tag{4.13}$$

Din (4.12) și (4.13), în anumite condiții impuse constantele ε , μ , σ , și c , componentele câmpului magnetic și ale celui electric satisfac, după caz, ecuația omogenă a propagării căldurii sau ecuația omogenă a propagării undelor, [22], p. 55.

Dacă nu am fi presupus că $\mathbf{I}^e = \mathbf{0}$, atunci ecuațiile (4.12) și (4.13) nu ar fi fost omogene.

3. În cazul particular când mediul conductor este un fir, cu alte cuvinte când propagarea se face numai într-o direcție (spre exemplu, axa Ox) dacă presupunem în plus și faptul că $\mathbf{I}^e \neq \mathbf{0}$, obținem, la fel ca și (4.13), ecuația:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{F}(t, x), \quad (4.14)$$

a și b fiind funcții care se deduc din ε , μ și σ .

Prin urmare, coordonatele câmpului electric \mathbf{E} se comportă, după caz, ca și cum ar fi soluția unei coarde vibrante, fie se propagă în conductor ca și temperatura.

Fenomenele în care stările anumitor mărimi fizice nu depind de timp se numesc *fenomene staționare*.

În probleme de funcții complexe, de câmpuri electrice sau magnetice staționare, în studiul stării staționare a căldurii, în mecanică etc. se utilizează ecuații cu derivate parțiale de forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= f(x, y); \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= f(x, y, z), \end{aligned}$$

numite corespunzător: *ecuația lui Laplace în două dimensiuni*; *ecuația lui Laplace în trei dimensiuni*; *ecuația lui Poisson în două dimensiuni*; *ecuația lui Poisson în trei dimensiuni*.

Ecuațiile prezentate mai sus provin din studiul unor probleme practice și nu este necesară cunoașterea soluției generale; soluția trebuie căutată în anumite condiții suplimentare.

Din acest punct de vedere, deosebim trei categorii de probleme:

- a) Probleme cu condiții inițiale (*probleme Cauchy*);
- b) Probleme cu condiții la limită (*condiții pe frontieră*);
- c) Probleme mixte.

În rezolvarea acestor probleme trebuie să se țină seama de următoarele aspecte matematice ale calculelor:

1. Obținerea soluției căutate (*teorema de existență a soluției*);
2. Soluția obținută să fie unică (*teorema de unicitate a soluției*);
3. Soluția depinde continuu de datele problemei (*stabilitatea soluției*).

Stabilitatea soluției constă în faptul că la variații mici ale datelor problemei considerate corespund soluții care diferă puțin între ele.

Rezolvarea simultană a acestor cerințe ne conduce la concluzia că *problema este corect pusă*.

4.2 Tipuri de ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$, un domeniu oarecare, Ω o submulțime din \mathbb{R}^6 și $F : D \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție reală de opt variabile reale.

Definiția 4.2.1. O relație de forma

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \quad (4.15)$$

se numește **ecuație cu derivate parțiale de ordinul al doilea** dacă se cere să se determine toate funcțiile reale $u = \varphi(x, y)$, de clasă $C^2(D)$, care au proprietatea

$$F\left(x, y, \varphi(x, y), \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x, y), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x, y)\right) = 0, \quad \forall (x, y) \in D. \quad (4.16)$$

Definiția 4.2.2. Se numește **soluție** în domeniul D a ecuației (4.15) orice funcție $u = \varphi(x, y)$, de clasă $C^2(D)$, care are proprietatea (4.16).

Definiția 4.2.3. Variabilele reale $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ se numesc **variabilele independente** ale ecuației cu derivate parțiale (4.15), iar funcția $u = u(x, y)$, care apare în (4.15) împreună cu derivatele ei parțiale până la ordinul doi inclusiv, este denumită **funcția necunoscută** a ecuației (4.15).

Definiția 4.2.4. Ecuația (4.15) se numește **liniară** dacă F este o funcție liniară în u și derivatele acesteia.

Definiția 4.2.5. Ecuația (4.15) se numește **cvasiliniară** dacă F este o funcție liniară în derivatele parțiale de ordinul doilea ale funcției u .

În cele ce urmează vom considera ecuația cvasiliniară de ordinul al doilea. O asemenea ecuație are forma

$$a_{11}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \quad (4.17)$$

unde funcțiile cunoscute a_{11}, a_{12}, a_{22} se presupun a fi cel puțin de clasă C^2 în domeniul $D \subset \mathbb{R}^2$ și care nu se anulează simultan în D , iar G este o funcție reală de cinci variabile reale, definită pe un domeniu din \mathbb{R}^5 .

Definiția 4.2.6. Ecuația cu derivate parțiale de ordinul al doilea (4.17) se numește **liniară** dacă are forma

$$a_{11}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + f(x, y) = 0, \quad (4.18)$$

unde b_1, b_2 și f sunt funcții cunoscute de clasă cel puțin C^0 pe domeniul $D \subset \mathbb{R}^2$.

Să presupunem că în ecuația (4.17) sau în ecuația (4.18) se efectuează schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y). \end{cases} \quad (4.19)$$

Ca urmare a efectuării schimbării de variabile (4.19), ecuația (4.17) va avea o nouă formă, ceea ce înseamnă că se poate pune problema alegerii unei asemenea forme a schimbării (4.19) astfel încât ecuația (4.17) să poată fi pusă sub o formă cât mai convenabilă.

Aplicând regula de derivare a funcțiilor compuse, găsim că derivatele parțiale de ordinul unu și doi ale funcției necunoscute u , în raport cu variabilele x și y , se exprimă în funcție de derivatele lui u în raport cu ξ și η prin relațiile

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}, \end{cases} \quad (4.20)$$

unde $u(x, y) = u(\xi(x, y), \eta(x, y))$.

Din relațiile (4.20) deducem că operatorii de derivare parțială față de variabilele x și y se exprimă liniar prin operatorii de derivare parțială în raport cu variabilele ξ și η , și anume

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}, \end{cases} \quad (4.21)$$

unde funcțiile $\xi = \xi(x, y)$ și $\eta = \eta(x, y)$ sunt date în (4.19).

Aplicând operatorii de derivare parțială $\frac{\partial}{\partial x}$ și $\frac{\partial}{\partial y}$ ambilor membri ai relațiilor (4.20) și ținând cont de (4.21) deducem că derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcției necunoscute u , în raport cu vechile variabile x și y , adică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

se exprimă cu ajutorul derivatelor parțiale de ordinul al doilea ale funcției u în raport cu variabilele noi, ξ și η .

Mai jos, se arată cum se obține derivata parțială secundă $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}; \end{aligned} \quad (4.22)$$

Celelalte două derivate parțiale de ordinul al doilea se obțin analog.

Derivata parțială mixtă de ordinul doi are expresia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}, \quad (4.23)$$

în timp ce a doua derivată parțială secundă nemixtă se exprimă prin relația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}. \quad (4.24)$$

Introducând expresiile precedente în ecuația (4.17) și scoțând factor comun derivatele parțiale $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$, obținem o ecuație de forma

$$c_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2c_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + H\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0, \quad (4.25)$$

unde

$$\begin{cases} c_{11} = a_{11} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2, \\ c_{12} = a_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + a_{12} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + a_{22} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ c_{22} = a_{11} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2, \end{cases} \quad (4.26)$$

iar H este o funcție reală definită pe un domeniu din \mathbb{R}^5 .

Dacă expresiile (4.20) – (4.24) se înlocuiesc în ecuația (4.18), atunci aceasta din urmă devine

$$c_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2c_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} + \gamma u + \delta = 0,$$

care arată că noua ecuație este de asemenea liniară.

Se observă că ecuația (4.25) se simplifică dacă unul din coeficienții c_{11} , c_{12} , c_{22} se anulează. Pentru aceasta este necesară o alegere convenabilă a schimbării de variabile (4.19).

Se observă că dacă drept funcție $\xi(x, y)$ se alege o soluție a ecuației

$$a_{11} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 = 0, \quad (4.27)$$

atunci coeficientul c_{11} devine nul și ecuația (4.25) se transformă în una mai simplă.

Fie $\varphi(x, y) = C$ o curbă integrală a ecuației (4.27). Pe această curbă are loc relația

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0,$$

sau

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{dy}{dx} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Înlocuind această expresie a derivatei parțiale $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ în (4.27) și simplificând cu $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2$, se obține ecuația

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dy \cdot dx + a_{22} dx^2 = 0 \quad (4.28)$$

numită *ecuația caracteristică*. Integralele ecuației (4.28) se numesc *curbe caracteristice* ale ecuației cu derivate parțiale de ordinul al doilea (4.17).

Rezolvând ecuația (4.28) în raport cu $\frac{dy}{dx}$ se obțin două ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi, și anume:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}; \\ \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \end{cases} \quad (4.29)$$

În funcție de semnul expresiei de sub radicalii din (4.29), ecuația (4.17) se numește respectiv:

de tip hiperbolic, dacă $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$;

de tip eliptic, dacă $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$;

de tip parabolic, dacă $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$.

Pentru găsirea soluției unei ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea este necesară efectuarea unor transformări care să conducă la o formă cât mai simplă a acesteia, numită *forma canonică*.

4.3 Reducerea la forma canonică a ecuațiilor de tip hiperbolic

În acest caz, avem $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$. Cele două ecuații diferențiale ordinare (4.29) furnizează soluțiile generale

$$\varphi(x, y) = c_1, \quad \psi(x, y) = c_2.$$

Luând $\xi = \varphi(x, y)$ și $\eta = \psi(x, y)$, expresiile coeficienților c_{11} și c_{22} devin identic nule și împărțind cu coeficientul derivatei $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$, ecuația (4.25) devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = H_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \quad (4.30)$$

care se numește *forma canonică* a unei ecuații de tip hiperbolic.

Exemplul 4.3.1. Să se reducă la forma canonică și apoi să se integreze ecuația liniară cu derivate parțiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 6\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Soluție. Ecuația caracteristică atașată $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} - 3 = 0$ are soluțiile $\frac{dy}{dx} = 3$ și $\frac{dy}{dx} = -1$, care au respectiv integralele generale (soluțiile generale) $3x - y = c_1$ și $x + y = c_2$. Din punct de vedere geometric fiecare dintre aceste soluții generale reprezintă o familie de drepte în plan.

Conform teoriei prezentate, se face schimbarea de variabile $\begin{cases} \xi = 3x - y, \\ \eta = x + y \end{cases}$ și se calculează derivatele parțiale:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = 3\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(3\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 3\frac{\partial}{\partial \xi} \left(3\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(3\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 9\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 3\frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = -3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

care înlocuite în ecuație conduc la forma canonică

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Pentru obținerea soluției acestei ecuații canonice, se notează $\omega = \frac{\partial u}{\partial \eta}$ și ecuația devine $2\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \omega = 0$, care este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi. Sistemul caracteristic corespunzător ultimei ecuații este

$$\frac{d\xi}{2} = \frac{d\eta}{0} = -\frac{d\omega}{\omega}.$$

Integralele prime ale acestui sistem caracteristic sunt: $\omega \cdot e^{\xi/2} = c_1$; $\eta = c_2$, unde c_1 și c_2 sunt constante arbitrare. Soluția generală a ecuației cu derivate parțiale de ordinul întâi este funcția $\omega = \omega(\xi, \eta)$ definită

implicit de ecuația $F(\omega \cdot e^{\xi/2}, \eta) = 0$, din care rezultă $\omega = e^{-\xi/2}\Phi(\eta)$, unde Φ este o funcție arbitrară. Ținând cont de ce s-a notat cu ω , deducem că $u = u(\xi, \eta)$ este soluția ecuației cu derivate parțiale de ordinul întâi

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = e^{-\xi/2}\Phi(\eta),$$

a cărei sistem caracteristic este $\frac{d\xi}{0} = \frac{d\eta}{1} = \frac{du}{e^{-\xi/2}\Phi(\eta)}$. Procedând ca mai sus, găsim că soluția generală $u = u(\xi, \eta)$ a ecuației canonice este

$$u = e^{-\xi/2}\phi(\eta) + \psi(\xi),$$

unde ϕ și ψ sunt funcții arbitrare.

Soluția generală $u = u(x, y)$ a ecuației inițiale se determină din relația precedentă în care facem $\xi = 3x - y$ și $\eta = x + y$. Obținem $u(x, y) = e^{(y-3x)/2}\phi(x+y) + \psi(3x-y)$. ■

Exemplul 4.3.2. Să se integreze ecuația liniară cu derivate parțiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4x + 3 \cos y.$$

Soluție. A integra o ecuație diferențială înseamnă a determina toate soluțiile sale.

Căutăm o soluție a ecuației cu derivate parțiale în forma

$$u(x, y) = u_o(x, y) + u_p(x, y),$$

unde $u_o(x, y)$ este soluția ecuației omogene $u_{xx} - u_{yy} = 0$, iar $u_p(x, y)$ este o soluție particulară a ecuației neomogene, de forma membrului drept.

Pentru a integra ecuația omogenă, o vom aduce mai întâi la forma canonică. Ușor se constată că ecuația omogenă este de tip hiperbolic, iar ecuația sa caracteristică este $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0$, din care deducem că cele două ecuații diferențiale ale caracteristicilor sunt $\frac{dy}{dx} = 1$ și $\frac{dy}{dx} = -1$. Prima dintre ele are soluția generală $y - x = c_1$, iar cea de a doua are soluția generală $y + x = c_2$.

Se face schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \xi = y - x, \\ \eta = y + x \end{cases}$$

și se calculează derivatele parțiale

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \end{aligned}$$

care înlocuite în ecuația omogenă, conduc la forma canonică

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Integrând această ecuație redusă la forma canonică, găsim că funcția u , ca funcție de ξ și η are expresia

$$u = \phi(\xi) + \psi(\eta),$$

unde $\phi(\xi)$ și $\psi(\eta)$ sunt funcții diferențiabile arbitrare.

Revenind la schimbarea de variabilă, se obține soluția ecuației omogene

$$u_o(x, y) = \phi(y - x) + \psi(y + x).$$

Pentru ecuația neomogenă încercăm o soluție particulară de forma membrului drept, adică

$$u_p(x, y) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 + b \cos y.$$

Calculând derivatele parțiale necesare și impunând ca u_p să fie soluția ecuației neomogene, se obține

$$6a_0 x + 2a_1 + b \cos y = 4x + 3 \cos y.$$

Prin identificare, se găsește $a_0 = 2/3$, $a_1 = 0$ și $b = 3$, iar soluția particulară devine

$$u_p(x, y) = \frac{2}{3} x^3 + a_2 x + a_3 + 3 \cos y.$$

Soluția generală a ecuației date este

$$u(x, y) = \phi(y - x) + \psi(y + x) + \frac{2}{3} x^3 + a_2 x + a_3 + 3 \cos y,$$

unde funcțiile ϕ și ψ sunt complet arbitrare, iar constantele a_2 și a_3 sunt de asemenea arbitrare. ■

Exemplul 4.3.3. Să se integreze ecuația

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 3 \ln x + 2 \ln y.$$

Soluție. Se procedează ca la exercițiul precedent căutând o soluție de forma

$$u(x, y) = u_o(x, y) + u_p(x, y),$$

unde u_o și u_p au semnificații asemănătoare, dar raportate la ecuația dată.

Se constată că cele două familii de curbe caracteristice (ecuația dată este de tip hiperbolic) sunt $\ln x = c_1$ și $\ln y = c_2$, ceea ce ne determină să efectuăm schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \xi = \ln x, \\ \eta = \ln y. \end{cases}$$

În final suntem conduși la rezultatul

$$u(x, y) = \phi\left(\ln \frac{x}{y}\right) + \psi(\ln xy) + \frac{1}{2} \ln^3 x + \frac{1}{2} \ln^3 y,$$

unde ϕ și ψ sunt funcții diferențiabile arbitrare. ■

4.4 Reducerea la forma canonică a ecuațiilor de tip parabolic

În acest caz, are loc relația $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$. De aici, rezultă că a_{11} și a_{22} au același semn, care poate fi presupus pozitiv și deci $a_{12} = \pm \sqrt{a_{11}} \cdot \sqrt{a_{22}}$. Vom considera că și a_{12} este pozitiv, cazul $a_{12} < 0$ tratându-se asemănător. Coeficientul c_{11} se poate scrie în forma

$$c_{11} = \left(\sqrt{a_{11}} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{a_{22}} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2.$$

Cele două ecuații (4.29) coincid și furnizează o singură integrală generală, și anume $\varphi(x, y) = c$. Efectuând schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y), \end{cases}$$

unde $\psi(x, y)$ este o funcție independentă funcțional de φ , expresia lui c_{11} devine nulă, ceea ce atrage relația

$$\sqrt{a_{11}} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{a_{22}} \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0. \quad (4.31)$$

Dacă în expresia lui c_{12} folosim că $a_{12} = \pm \sqrt{a_{11}} \cdot \sqrt{a_{22}}$, atunci constatăm cu ușurință că expresia lui c_{12} este

$$c_{12} = \left(\sqrt{a_{11}} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{a_{22}} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \cdot \left(\sqrt{a_{11}} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{a_{22}} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right).$$

Folosind (4.31), deducem $c_{12} = 0$.

După împărțirea cu c_{22} , ecuația (4.25) are forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = H_2 \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right). \quad (4.32)$$

Exemplul 4.4.1. Să se reducă la forma canonică, ecuația

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0.$$

Pornind de la forma canonică găsită, determinați soluția generală a ecuației date.

Soluție. Deoarece $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = (xy)^2 - x^2 y^2 = 0$, rezultă că ecuația este de tip parabolic. Ecuația caracteristică atașată,

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2xy \frac{dy}{dx} + y^2 = 0,$$

este echivalentă cu ecuația cu variabile separabile $x \frac{dy}{dx} - y = 0$ a carei soluție generală este $\frac{y}{x} = c$. Conform teoriei prezentate, se efectuează următoarea schimbare de variabile

$$\begin{cases} \xi = \frac{y}{x} \\ \eta = y. \end{cases}$$

Calculând derivatele parțiale de ordinele întâi și doi, se obține:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{2y}{x^3} \frac{\partial u}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{x^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{y}{x^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{cases}$$

Înlocuind derivatele parțiale în ecuația inițială, obținem forma canonică $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$, de unde rezultă că forma generală a funcției $u = u(\xi, \eta)$ care satisface această ecuație este $u = \eta \cdot f(\xi) + g(\xi)$, în care f și g sunt funcții arbitrare de două ori diferențiabile pe un interval din \mathbb{R} .

Revenind la variabilele x și y găsim $u(x, y) = yf\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$ și această funcție este soluția generală a ecuației inițiale. ■

Exemplul 4.4.2. Să se reducă la forma canonică și apoi să se integreze ecuația liniară cu derivate parțiale de ordinul al doilea

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

știind că sunt satisfăcute condițiile inițiale

$$u(1, y) = 1 - \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 2y. \quad (4.33)$$

Soluție. Deoarece $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = (xy)^2 - x^2 \cdot y^2 = 0$ rezultă că ecuația este de tip parabolic.

Ecuația caracteristică atașată

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy \frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

este echivalentă cu ecuația diferențială ordinară $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, care are soluția generală $xy = c$.

Conform teoriei prezentată, efectuăm schimbarea de variabile $\begin{cases} \xi = xy \\ \eta = x, \end{cases}$ unde η este cea mai simplă funcție aleasă astfel încât $\xi = \xi(x, y)$ și $\eta = \eta(x, y)$ să fie independente funcțional. Calculăm derivatele parțiale și găsim:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x \frac{\partial u}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = xy \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}. \end{cases}$$

După înlocuirea derivatelor parțiale de mai sus în ecuația din enunț, se obține forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad \text{sau} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Pentru obținerea soluției, se notează $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \omega$ și ecuația devine $\frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta} \cdot \omega = 0$, care este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi a cărei sistem caracteristic este

$$\frac{d\xi}{0} = \frac{d\eta}{\eta} = \frac{d\omega}{-\omega}.$$

Cele două integrale prime ale acestui sistem simetric sunt $\xi = c_1$ și $\omega \cdot \eta = c_2$ și deci soluția generală a ecuației cu derivate parțiale de ordinul întâi este funcția $\omega = \omega(\xi, \eta)$ definită implicit de ecuația $F(\xi, \omega \cdot \eta) = 0$, unde F este o funcție diferențiabilă arbitrară. Se observă că ecuația $F(\xi, \omega \cdot \eta) = 0$ se explicitază simplu și avem

$$\omega = \frac{1}{\eta} \cdot f(\xi), \quad (4.34)$$

unde $f(\xi)$ este o funcție arbitrară, care se deduce din F .

Ținând cont că $\omega = \frac{\partial u}{\partial \eta}$, ecuația (4.34) devine $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{\eta} \cdot f(\xi)$, care are soluția generală $u = f(\xi) \cdot \ln \eta + g(\xi)$, unde g este o funcție derivabilă arbitrară.

Revenind la variabilele x și y , găsim că soluția generală a ecuației din enunț este

$$u = f(xy) \cdot \ln x + g(xy).$$

Funcțiile f și g se determină din condițiile inițiale (4.33), care conduc la relațiile:

$$g(y) = 1 - \cos y; \quad f(y) + yg'(y) = 2y,$$

din care deducem $f(y) = y(2 - \sin y)$ și $g(y) = 1 - \cos y$.

Prin urmare,

$$u(x, y) = x \cdot y \cdot (2 - \sin xy) \cdot \ln x + 1 - \cos(x \cdot y).$$

este soluția ecuației din enunț care satisface condițiile inițiale (4.33). ■

4.5 Reducerea la forma canonică a ecuațiilor de tip eliptic

În acest caz $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} < 0$ și integralele generale ale ecuațiilor diferențiale ordinare (4.29) sunt de forma:

$$\varphi(x, y) = c_1; \quad \overline{\varphi}(x, y) = c_2,$$

unde $\overline{\varphi}$ este conjugata funcției cu valori complexe φ . Prin urmare,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \alpha(x, y) + i\beta(x, y), \\ \overline{\varphi}(x, y) &= \alpha(x, y) - i\beta(x, y). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Se efectuează transformarea

$$\begin{cases} \xi = \alpha(x, y), \\ \eta = \beta(x, y). \end{cases} \tag{4.36}$$

Deoarece $\varphi(x, y) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y)$ este soluția ecuației (4.27), rezultă că $\alpha = \alpha(x, y)$ și $\beta = \beta(x, y)$ satisfac ecuația

$$a_{11} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + i \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + 2a_{12} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + i \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + i \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) + a_{22} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + i \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 = 0$$

care, după efectuarea operațiilor de ridicare la pătrat și înmulțire, devine

$$\begin{aligned} & \left(a_{11} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2 \right) - \left(a_{11} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + 2a_{12} \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} + a_{22} \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 \right) + \\ & + 2i \left(a_{11} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + a_{12} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) + a_{22} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Din (4.26), (4.36) și (4.37) rezultă

$$c_{11} - c_{22} + 2ic_{12} = 0. \tag{4.38}$$

Însă, o funcție complexă este nulă dacă și numai dacă partea reală și partea imaginară sunt nule, astfel că din (4.38) obținem $c_{11} = c_{22}$ și $c_{12} = 0$.

Dacă împărțim cu c_{11} , ecuația (4.25) se scrie sub forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = H_3 \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right),$$

unde funcția necunoscută este $u = u(\xi, \eta)$.

Exemplul 4.5.1. Să se reducă la forma canonică ecuația cu derivate parțiale de ordinul al doilea

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Soluție. Avem $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -x^2y^2 < 0$, deci ecuația este de tip eliptic. Ecuațiile (4.29) corespunzătoare sunt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-1 \pm i)y}{x}.$$

Integrând ecuația diferențială ordinară de ordinul întâi corespunzătoare semmului plus, găsim

$$\ln(xy) - i \ln x = c,$$

de unde deducem că trebuie efectuată schimbarea de variabile $\begin{cases} \xi = \ln xy \\ \eta = \ln x. \end{cases}$ Aplicând teoria dezvoltată mai sus pentru calculul derivatelor parțiale de ordinele întâi și doi, găsim expresiile:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{2}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{xy} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{xy} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{1}{y^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{1}{y^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta}, \end{cases}$$

care introduse în ecuația inițială, o simplifică, devenind

$$\frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

Din a doua relație a schimbării de variabile deducem $x = e^\eta$, pe care dacă o folosim în relația precedentă găsim că expresia canonică a ecuației considerate este $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - e^{2\eta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$. ■

Exemplul 4.5.2. Să se reducă la forma canonică și apoi să se integreze, ecuația liniară cu derivate parțiale de ordinul al doilea

$$(1+x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Soluție. Deoarece $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -(1+x^2)(1+y^2) < 0$, rezultă că ecuația este de tip eliptic. Ecuația caracteristică atașată

$$(1+x^2) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + (1+y^2) = 0,$$

care se mai poate scrie în forma $(1+x^2)(dy)^2 + (1+y^2)(dx)^2 = 0$, este echivalentă cu ecuațiile diferențiale

$$\begin{cases} \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = i \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \\ \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = -i \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \ln(y + \sqrt{1+y^2}) - i \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = c_1, \\ \ln(y + \sqrt{1+y^2}) + i \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = c_2, \end{cases}$$

unde c_1 și c_2 sunt constante arbitrare.

Se efectuează următoarea schimbare de variabile $\begin{cases} \xi = \ln(y + \sqrt{1+y^2}) \\ \eta = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \end{cases}$ Se calculează derivatele parțiale și se obține:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \frac{\partial u}{\partial \xi}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{1+x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{1+y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{y}{(1+y^2)\sqrt{1+y^2}} \frac{\partial u}{\partial \xi}. \end{cases}$$

Înlocuind derivatele parțiale în ecuația inițială, obținem forma canonică $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$. Pentru integrarea ecuației canonice, se caută soluții de forma $u(\xi, \eta) = e^{\lambda\xi + \mu\eta}$. Această funcție este soluție a ecuației canonice dacă $\lambda^2 + \mu^2 = 0$ sau $\lambda = \pm i\mu$.

În acest mod, am determinat două soluțiile particulare $\tilde{u}_1(\xi, \eta; \lambda)$ și $\tilde{u}_2(\xi, \eta; \lambda)$, unde

$$\begin{cases} \tilde{u}_1(\xi, \eta; \lambda) = e^{\lambda(\xi + i\eta)} = e^{\lambda\xi}(\cos \lambda\eta + i \sin \lambda\eta), \\ \tilde{u}_2(\xi, \eta; \lambda) = e^{\lambda(\xi - i\eta)} = e^{\lambda\xi}(\cos \lambda\eta - i \sin \lambda\eta). \end{cases}$$

iar λ este o constantă reală arbitrară, care însă sunt funcții complex conjugate.

Datorită faptului că ecuația canonică este liniară, rezultă că funcțiile reale

$$\begin{cases} u_1(\xi, \eta; \lambda) = \frac{\tilde{u}_1(\xi, \eta; \lambda) + \tilde{u}_2(\xi, \eta; \lambda)}{2}, \\ u_2(\xi, \eta; \lambda) = \frac{\tilde{u}_1(\xi, \eta; \lambda) - \tilde{u}_2(\xi, \eta; \lambda)}{2i} \end{cases}$$

sunt de asemeni soluții. Efectuând calculele, găsim

$$\begin{cases} u_1(\xi, \eta; \lambda) = e^{\lambda\xi} \cos \lambda\eta, \\ u_2(\xi, \eta; \lambda) = e^{\lambda\xi} \sin \lambda\eta. \end{cases}$$

Prin verificare directă se constată că orice funcție de forma

$$u(\xi, \eta; \lambda) = e^{\lambda\xi} (F_1(\lambda) \cos \lambda\eta + F_2(\lambda) \sin \lambda\eta),$$

unde $F_1(\lambda)$ și $F_2(\lambda)$ sunt funcții arbitrare, este de asemeni o soluție a ecuației canonice. Parametrul λ poate lua orice valoare reală.

Folosind principiul superpoziției, deducem că soluția generală a ecuației canonice este

$$u(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda\xi} (F_1(\lambda) \cos \lambda\eta + F_2(\lambda) \sin \lambda\eta) d\lambda.$$

Revenind la variabilele inițiale x și y , găsim că soluția generală a ecuației considerate este

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y + \sqrt{1+y^2})^\lambda (F_1(\lambda) \cos(\lambda \ln(x + \sqrt{1+x^2})) + F_2(\lambda) \sin(\lambda \ln(x + \sqrt{1+x^2}))) d\lambda,$$

unde $F_1(\lambda)$ și $F_2(\lambda)$ sunt funcții reale arbitrare absolut integrabile pe axa reală. ■

Capitolul 5

Ecuatii cu derivate parțiale de tip hiperbolic

5.1 Ecuația coardei vibrante

Se consideră un fir flexibil pentru care lungimea este dimensiunea predominantă, celelalte fiind neglijabile, numit în cele ce urmează *coardă elastică*. Să presupunem că

- în poziția de echilibru, coarda ocupă segmentul OA pe axa Ox ;
- prin aplicarea unei forțe, coarda execută *oscilații* în planul vertical xOu ;
- în timpul vibrației, fiecare punct al coardei execută *oscilații verticale* pe o dreaptă perpendiculară pe poziția de echilibru.

Fie o coardă elastică omogenă, de lungime ℓ care, în repaos, ocupă poziția segmentului OA pe axa Ox .

Prin aplicarea unor forțe, coarda execută vibrații în planul xOu .

Fie M un punct arbitrar al coardei și $M_0(x)$ poziția sa de repaos. Să presupunem că punctul M , în mișcare, rămâne într-un plan perpendicular pe OA . *Deplasarea* de la M_0 la M depinde de x și de timpul t . Se demonstrează că dacă $u = u(x, t)$ reprezintă deplasarea punctelor coardei față de poziția de echilibru (*elongația coardei*), măsurată în punctul de abscisă $x \in [0, \ell]$, la momentul $t > 0$, atunci $u(x, t)$ verifică ecuația

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x), \quad a \in \mathbb{R}. \quad (5.1)$$

Ecuația (5.1) se numește *ecuația neomogenă a coardei vibrante* sau *ecuația undelor unidimensionale*. Această ecuație se întâlnește în studiul *propagării undelor elastice* cum ar fi cele *acustice*, *optice*, *electromagnetice* și din acest motiv se mai numește *ecuația undelor* sau *ecuația propagării undelor elastice*.

Constanta a^2 are valoarea $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$, unde T_0 este mărimea algebrică a proiecției ortogonale pe axa Ox a vectorului *tensiune* în coarda aflată în repaos (*poziția de echilibru*) și ρ este densitatea materialului din care este confecționat firul extensibil, presupus omogen, adică masa unei unități de lungime a coardei, iar $f(t, x)$ este mărimea algebrică a rezultantei forțelor exterioare.

Se spune despre o coardă că este *infinită* dacă lungimea ei este foarte mare în comparație cu elongațiile maxime. Un fir de telegraf foarte lung poate servi ca exemplu de coardă infinită.

Ecuația

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (5.2)$$

se numește *ecuația omogenă a coardei vibrante*.

Din considerente practice, soluțiile ecuației (5.1), sau (5.2), vor trebui să verifice și alte condiții suplimentare. De exemplu, în cazul în care $u(t, x)$ reprezintă vibrațiile unei coarde elastice, omogene, fixată la capete, vom avea *condiții la limită* de forma:

$$u(t, 0) = 0; \quad u(t, \ell) = 0. \quad (5.3)$$

Integrarea ecuației coardei vibrante constă în a-i determina unul din modurile posibile de vibrație descris de funcția $u(t, x)$ mod care va fi bine determinat numai dacă se cunosc apriori *poziția inițială* și *viteza inițială* coardei, numite *condiții inițiale*:

$$u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, x)|_{t=0} = \psi(x). \quad (5.4)$$

Aceasta înseamnă că în timpul vibrației realizate prin modul pe care vrem să-l determinăm, vom cunoaște în fiecare moment $t > 0$ poziția punctului de pe coardă, de abscisă x , dacă la începutul mișcării, în momentul $t = 0$, este dată poziția fiecărui punct al coardei prin plasarea sa pe graficul funcției $\varphi(x)$, precum și distribuția vitezelor fiecărui punct al acestui grafic prin valorile funcției $\psi(x)$.

Condițiile (5.4) se numesc condiții inițiale ale *problemei Cauchy pentru coarda vibrantă*.

Deci, $\varphi(x)$ ne dă profilul coardei la momentul inițial, iar $\psi(x)$ ne dă viteza cu care vibrează punctele coardei la momentul $t = 0$.

Dacă coarda este de lungime infinită, se pune problema determinării funcției $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică ecuația (5.1) cu condițiile inițiale (5.3). Pentru aceasta există două metode: *metoda lui d'Alembert*¹ și *metoda separării variabilelor* sau *metoda lui Fourier*².

În cele ce urmează vom studia cazurile când coarda vibrantă este finită sau infinită, iar ecuația ei este omogenă sau neomogenă.

5.2 Metoda lui d'Alembert de integrare a ecuației omogene a coardei vibrante infinite

Fie coarda vibrantă de lungime infinită ale cărei elongații satisfac ecuația de tip hiperbolic (5.2) în mulțimea $\mathbb{R} \times [0, \infty) \subset \mathbb{R}^2$, la care se adaugă condițiile inițiale

$$u(0, x) = \varphi(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5.5)$$

Ecuația caracteristică corespunzătoare, dată de

$$a^2 \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 - 1 = 0, \quad (5.6)$$

este echivalentă cu

$$\begin{cases} \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{a} \\ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{a} \end{cases} \iff \begin{cases} t = -\frac{1}{a}x + c_1 \\ t = \frac{1}{a}x + c_2 \end{cases} \iff \begin{cases} at + x = c_1 \\ at - x = c_2. \end{cases}$$

Prin urmare, curbele caracteristice ale ecuației omogene a coardei vibrante sunt drepte.

Conform teoriei prezentate, efectuăm schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at. \end{cases} \quad (5.7)$$

¹d'Alembert, Jean le Rond (1717 – 1783), matematician, fizician și filozof francez. Rezultatele sale din domeniul matematicii, în particular cele legate de rezolvarea ecuațiilor cu derivate parțiale, au găsit aplicații imediate în fizică și astronomie. Mai multe noțiuni din matematică și fizică au primit numele său: *metoda lui d'Alembert* pentru rezolvarea ecuației propagării undelor și *formula lui d'Alembert* care exprimă soluția acestei ecuații, principiul lui d'Alembert privitor la forțele și accelerațiile unui sistem de particule, *teorema lui d'Alembert* legată de numărul rădăcinilor unui polinom în mulțimea numerelor complexe, criteriul lui d'Alembert de convergență a unor serii etc.

²Fourier, baron Joseph (1768 – 1830), matematician francez. Studiind propagarea căldurii, el descoperi seriile trigonometrice cunoscute drept *serii Fourier*, puternic instrument matematic. A fost membru al Academiei Franceze de Științe.

Aplicând regulile de derivare ale funcțiilor compuse, găsim că derivatele parțiale de ordinul al doilea, nemixte, ale funcției necunoscute sunt date de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \end{cases} \quad (5.8)$$

Înlocuind (5.8) în (5.2) se obține

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad (5.9)$$

care reprezintă forma canonică a ecuației omogene a propagării undelor.

Ecuația (5.9) se mai poate scrie în forma

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0,$$

din care deducem că derivata parțială $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ depinde doar de variabila ξ , adică

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi), \quad (5.10)$$

unde $f(\xi)$ este o funcție arbitrară, care admite primitive.

Prin integrarea ecuației diferențiale (5.10) găsim

$$u(\xi, \eta) = h_1(\xi) + h_2(\eta),$$

unde h_1 este o primitivă a funcției f , iar h_2 este o funcție arbitrară.

Revenind la vechile variabile, se obține

$$u(x, t) = h_1(x + at) + h_2(x - at), \quad (5.11)$$

care reprezintă *soluția generală* a ecuației omogene a coardei vibrante.

Impunând funcției (5.11) să satisfacă condițiile inițiale (5.5), deducem că funcțiile h_1 și h_2 trebuie să satisfacă sistemul

$$\begin{cases} h_1(x) + h_2(x) &= \varphi(x) \\ h_1'(x) - h_2'(x) &= \frac{1}{a} \psi(x). \end{cases} \quad (5.12)$$

Scriind cea de a doua ecuație din (5.12) în forma $h_1'(\tau) - h_2'(\tau) = \frac{1}{a} \psi(\tau)$ și integrând această egalitate între limitele 0 și x , obținem

$$h_1(x) - h_2(x) = c + \frac{1}{a} \int_0^x \psi(\tau) d\tau, \quad (5.13)$$

unde constanta c reprezintă valoarea în $x = 0$ a funcției $h_1 - h_2$.

Considerând (5.13) și prima ecuație din sistemul (5.12), constatăm că funcțiile h_1 și h_2 se determină din sistemul

$$\begin{cases} h_1(x) + h_2(x) &= \varphi(x) \\ h_1(x) - h_2(x) &= c + \frac{1}{a} \int_0^x \psi(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (5.14)$$

Rezolvând sistemul (5.14), găsim pentru valorile funcțiilor h_1 și h_2 expresiile

$$\begin{cases} h_1(x) &= \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\tau) d\tau + \frac{c}{2} \\ h_2(x) &= \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\tau) d\tau - \frac{c}{2}. \end{cases} \quad (5.15)$$

Pentru a determina soluția problemei Cauchy pentru coarda vibrantă infinită, adică soluția în $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ a ecuației liniare omogene cu derivate parțiale de ordinul al doilea de tip hiperbolic (5.2) care să satisfacă condițiile inițiale (5.5), avem nevoie de valorile funcțiilor h_1 și h_2 în respectiv punctele $x + at$ și $x - at$. Din (5.15), avem

$$\begin{cases} h_1(x + at) &= \frac{1}{2}\varphi(x + at) + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(\tau) d\tau + \frac{c}{2} \\ h_2(x - at) &= \frac{1}{2}\varphi(x - at) - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} \psi(\tau) d\tau - \frac{c}{2}. \end{cases} \quad (5.16)$$

Soluția problemei Cauchy pentru coarda vibrantă infinită se obține atunci din (5.11) și (5.16) și se vede simplu că se poate scrie sub forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x + at) + \varphi(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau) d\tau. \quad (5.17)$$

Relația (5.17) este denumită uneori *formula lui d'Alembert*.

5.3 Metodă alternativă de deducere a formulei lui d'Alembert

De data aceasta, coardei vibrante infinite îi vom spune *coardă elastică infinită*. Considerăm o coardă elastică suficient de lungă încât să putem presupune că are lungime infinită. Sub acțiunea unor factori externi, coarda vibrează. La momentul $t = 0$ configurația corzii este graficul funcției $f(x)$ definită pe întreaga axă reală. La momentul $t > 0$, datorită vibrațiilor, configurația corzii este alta, să zicem $u(x, t)$.

Funcția $u = u(x, t)$ se numește **săgeată**.

Presupunem că se cunoaște viteza $g(x)$ cu care se schimbă forma corzii la momentul $t = 0$, deci cunoaștem valoarea în punctul $(x, 0)$ a derivatei parțiale în raport cu variabila temporară t a funcției $u(x, t)$.

Din teoria elasticității se știe că legea după care vibrează coarda este

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (5.18)$$

Ne propunem să se determinăm printr-o altă metodă poziția corzii la orice moment și în orice punct al ei.

Problema pusă se reduce la determinarea acelei soluții $u(x, t)$ a ecuației (5.18) care satisface *condițiile inițiale*

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (5.20)$$

Astfel, avem de rezolvat o *problemă de tip Cauchy pentru ecuația diferențială* (5.18) cu *condițiile inițiale* (5.19) și (5.20).

Pentru aceasta, vom înmulți ecuația cu $e^{-i\xi x}$ după care integrăm în raport cu x de la $-\infty$ la $+\infty$.

Derivarea parțială în raport t comută cu integrarea în raport cu x , astfel că putem scrie

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) e^{-i\xi x} dx. \quad (5.21)$$

În membrul drept al relației (5.21) se aplică următorul rezultat de la transformata Fourier

Teorema 5.3.1. *Dacă primele $r - 1$ derivate ale funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tind la zero când $|t| \rightarrow \infty$ iar $f^{(r)}(t)$ este absolut integrabilă, atunci*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^r f}{dt^r}(t) e^{-iut} dt = (iu)^r F(u). \quad (5.22)$$

Aplicând Teorema 5.3.1, obținem ecuația

$$\frac{1}{a^2} \frac{d^2 U}{dt^2}(\xi, t) + \xi^2 U(\xi, t) = 0, \quad (5.23)$$

unde funcția $U(\xi, t)$ este transformata Fourier a funcției $u(x, t)$.

În felul acesta, cu ajutorul transformatei Fourier am înlocuit ecuația diferențială cu derivate parțiale (5.18) cu ecuația diferențială ordinară (5.23).

Condițiile inițiale (5.19) și (5.20) se transformă respectiv în

$$U(\xi, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = F(\xi); \quad (5.24)$$

$$\frac{dU}{dt}(\xi, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i\xi x} dx = G(\xi). \quad (5.25)$$

Astfel, avem de rezolvat o problemă de tip Cauchy pentru ecuația diferențială ordinară de ordinul doi, liniară, (5.23) cu condițiile inițiale (5.24) și (5.25).

Un sistem fundamental de soluții al ecuației (5.23) conține funcțiile

$$U_1(\xi, t) = \cos a\xi t, \quad U_2(\xi, t) = \sin a\xi t.$$

Atunci, soluția generală a ecuației (5.23) este

$$U(\xi, t) = C_1 U_1(\xi, t) + C_2 U_2(\xi, t) = C_1 \cos a\xi t + C_2 \sin a\xi t$$

unde constantele de integrare C_1 și C_2 sunt funcții de ξ . Însă,

$$U(\xi, 0) = C_1(\xi) = F(\xi), \quad \frac{dU}{dt}(\xi, 0) = a\xi C_2(\xi) = G(\xi).$$

Dacă folosim relațiile lui Euler, rezultă că expresia lui $U(\xi, t)$ este

$$U(\xi, t) = \frac{1}{2} F(\xi) (e^{iat\xi} + e^{-iat\xi}) + \frac{G(\xi)}{2ia\xi} (e^{iat\xi} - e^{-iat\xi}). \quad (5.26)$$

Aplicând transformarea Fourier inversă funcției $U(\xi, t)$, obținem

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi, t) e^{ix\xi} d\xi. \quad (5.27)$$

Înlocuind în (5.27) pe $U(\xi, t)$ din (5.26) și ținând cont de rezultatele

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{i(x \pm at)\xi} d\xi = f(x \pm at), \quad g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi) e^{iu\xi} d\xi,$$

$$\begin{aligned} \int_{x-at}^{x+at} g(u) du &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi) \left(\int_{x-at}^{x+at} e^{i\xi u} du \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\xi)}{i\xi} \left(e^{i(x+at)\xi} - e^{i(x-at)\xi} \right) d\xi, \end{aligned}$$

regăsim soluția de la paragraful precedent

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x+at) + f(x-at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(u) du.$$

5.4 Unicitatea soluției problemei Cauchy pentru coarda vibrantă infinită

Metoda lui d'Alembert dezvoltată în subsecțiunea precedentă demonstrează în fond existența soluției problemei Cauchy pentru coarda vibrantă infinită, nu însă și unicitatea sa.

Teorema 5.4.1. *Soluția problemei Cauchy pentru coarda vibrantă infinită este unică.*

Demonstrație. Pentru a demonstra unicitatea, presupunem că există două soluții distincte $u_1(x, t)$ și $u_2(x, t)$. Datorită liniarității ecuației (5.2), rezultă că diferența celor două soluții

$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

este de asemenea o soluție a ecuației cu derivate parțiale (5.2), care însă satisface condiții inițiale identic nule

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0,$$

ceea ce înseamnă că funcțiile φ și ψ din (5.5) sunt identic nule.

Conform formulei lui d'Alembert (5.17), soluția problemei Cauchy a coardei vibrante infinite, cu condiții inițiale nule, este funcția identic nulă, deci $u(x, t) = 0, \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$. **q.e.d.**

Observația 5.4.1. *Soluția problemei Cauchy pentru coarda vibrantă infinită este unică și este dată de formula lui d'Alembert (5.17).*

Exemplul 5.4.1. *Să se integreze ecuația coardei vibrante infinite*

$$\frac{1}{9} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

cu condițiile inițiale

$$\begin{cases} u(0, x) = x^2, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 3x^2. \end{cases}$$

Soluție. În acest caz, $a = 3$, $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = 3x^2$.

Aplicând formula lui d'Alembert (5.17), găsim că soluția problemei Cauchy este

$$u(x, t) = \frac{(x+3t)^2 + (x-3t)^2}{2} + \frac{1}{6} \int_{x-3t}^{x+3t} 3\tau^2 d\tau$$

sau

$$u(x, t) = x^2 + 3x^2t + 9t^2 + 9t^3.$$

■

5.5 Metoda separării variabilelor de integrare a ecuației omogene a coardei vibrante finite

Prin coardă vibrantă finită se înțelege un fir dintr-un material extensibil, omogen, fixat la capetele $x = 0$ și $x = \ell$, unde ℓ este lungimea coardei. Prin urmare, în poziția de echilibru, coarda ocupă segmentul $[0, \ell]$ de pe

axa Ox a reperului cartezian xOu .

Se notează cu $u(x, t)$ abaterea în punctul x , la momentul t , de la poziția de echilibru.

Problema care se pune constă în determinarea soluției ecuației omogene

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (x, t) \in [0, \ell] \times [0, \infty), \quad (5.28)$$

care să satisfacă condițiile la limită

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(\ell, t) = 0, \end{cases} \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (5.29)$$

și condițiile inițiale

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad \forall x \in [0, \ell]. \quad (5.30)$$

Pentru problema (5.28) – (5.30) se caută soluții de forma

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t), \quad (5.31)$$

unde $X(x)$ și $T(t)$ sunt funcții care urmează să fie determinate astfel încât ecuația (5.28) să fie satisfăcută și condițiile (5.29) și (5.30) să fie îndeplinite.

Derivatele parțiale nemixte de ordinul al doilea ale funcției u din (5.31) au expresiile

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x) \cdot T(t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x) \cdot T''(t). \end{cases} \quad (5.32)$$

Înlocuind (5.31) în (5.28), obținem relația

$$X(x) \cdot T''(t) - a^2 X''(x) \cdot T(t) = 0, \quad \forall (x, t) \in [0, \ell] \times [0, \infty),$$

care se mai poate scrie în forma

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = k, \quad (5.33)$$

unde k nu poate fi decât o constantă, deoarece trebuie să fie egală cu valoarea unei funcții numai de x , pe de o parte și simultan cu valoarea unei funcții numai de t , pe de altă parte, variabilele x și t fiind independente între ele.

Egalitățile (5.33) sunt îndeplinite dacă:

$$X''(x) - kX(x) = 0; \quad (5.34)$$

$$T''(t) - ka^2 T(t) = 0. \quad (5.35)$$

Observăm că condițiile la limită (5.29) sunt echivalente cu relațiile

$$X(0) = 0, \quad X(\ell) = 0. \quad (5.36)$$

Relația (5.34) constituie o ecuație diferențială ordinară, liniară, de ordinul al doilea, cu coeficienți constanți a cărei ecuație caracteristică $r^2 - k = 0$ are rădăcinile $r_1 = \sqrt{k}$ și $r_2 = -\sqrt{k}$.

Distingem trei cazuri.

Cazul I, în care presupunem $k > 0$, ceea ce înseamnă că rădăcinile caracteristice sunt reale și distincte, iar soluția generală a ecuației (5.34) se scrie sub forma

$$X(x) = c_1 e^{x\sqrt{k}} + c_2 e^{-x\sqrt{k}} \quad (5.37)$$

căreia impunându-i condițiile inițiale (5.36), obținem sistemul liniar și omogen

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^{\ell\sqrt{k}} + c_2 e^{-\ell\sqrt{k}} = 0, \end{cases}$$

pentru determinarea constantelor c_1 și c_2 . Determinantul acestui sistem este nenul, ceea ce arată că singura soluție este cea banală $c_1 = c_2 = 0$, care nu convine deoarece atrage după sine $X(x) = 0$ și deci $u(x, t) = 0$. Interpretând acest rezultat ajungem la concluzia că toate punctele coardei rămân tot timpul nemișcate, adică, în acest caz coarda nu ar executa nici un fel de vibrații, ceea ce contrazice condițiile inițiale.

Cazul II: în care presupunem $k = 0$, ceea ce înseamnă că ecuația diferențială (5.34) se reduce la $X''(x) = 0$ care are soluția generală

$$X(x) = c_1 \cdot x + c_2. \quad (5.38)$$

Impunând soluției (5.38) să satisfacă condițiile inițiale (5.36) găsim și de această dată că $c_1 = c_2 = 0$, care conduce la concluzia $X(x) = 0$ și implicit la soluția $u(x, t) = 0$, rezultat care contrazice condițiile inițiale (5.30), în sensul că acestea nu sunt satisfăcute.

Cazul III: $k < 0$. În acest caz, putem nota $k = -\nu^2$ și ecuația diferențială (5.34) va avea forma

$$X''(x) + \nu^2 X(x) = 0. \quad (5.39)$$

Ecuația caracteristică corespunzătoare ecuației diferențiale (5.39) este $r^2 + \nu^2 = 0$, iar rădăcinile acesteia sunt $r_1 = i\nu$ și $r_2 = -i\nu$, ceea ce atrage că

$$X(x) = c_1 \cdot \cos \nu x + c_2 \cdot \sin \nu x \quad (5.40)$$

este soluția generală a ecuației diferențiale (5.34), în care $k = -\nu^2$. Impunând soluției generale (5.40) condițiile inițiale (5.36), găsim

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_2 \cdot \sin \nu \ell = 0. \end{cases}$$

Neputând lua varianta $c_1 = c_2 = 0$ din aceleași motive ca mai sus, rămâne să impunem condiția $\sin \nu \ell = 0$, care conduce la $\nu \ell = n\pi$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Așadar, valoarea lui ν depinde de n , motiv pentru care pe viitor va fi notată prin ν_n , astfel că

$$\nu_n = \frac{n\pi}{\ell}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

iar pentru k vom avea valorile

$$k_n = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.41)$$

În concluzie, soluția ecuației diferențiale (5.39) care satisface condițiile la limită (5.36), pe care o vom nota de aici înainte prin $X_n(x)$, este

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (5.42)$$

Să ne întoarcem acum la ecuația diferențială (5.35), în care pentru k luăm valorile (5.41), adică la ecuațiile diferențiale ordinare, de ordinul al doilea, liniare și omogene

$$T''(t) + a^2 \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 T(t) = 0, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (5.43)$$

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, soluția generală corespunzătoare ecuației (5.35) este

$$T_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi a}{\ell} t + b_n \sin \frac{n\pi a}{\ell} t, \quad (5.44)$$

unde a_n și b_n , $n \in \mathbb{N}^*$, sunt deocamdată constante reale arbitrare.

Introducând (5.42) și (5.44) în (5.31) constatăm că

$$u_n(x, t) = \left(a_n \cos \frac{n\pi a}{\ell} t + b_n \sin \frac{n\pi a}{\ell} t \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (5.45)$$

sunt soluții ale ecuației coardei vibrante de lungime finită (5.28) care satisfac condițiile la limită (5.29).

Suma tuturor acestor soluții, în cazul când aceasta există, este de asemenea o soluție a ecuației (5.28) care satisface condițiile la limită (5.29). Notând această sumă cu $u(x, t)$, avem că funcția

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi a}{\ell} t + b_n \sin \frac{n\pi a}{\ell} t \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad (5.46)$$

unde coeficienții a_n și b_n , $n \in \mathbb{N}^*$, sunt deocamdată constante reale arbitrare, este soluție a ecuației (5.28) care satisface condițiile la limită (5.29).

Seria (5.46) poate fi derivată parțial termen cu termen, iar derivata parțială a funcției sumă în raport cu variabila t este

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\pi a}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(-a_n \sin \frac{n\pi a}{\ell} t + b_n \cos \frac{n\pi a}{\ell} t \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x. \quad (5.47)$$

Determinarea acestor coeficienți va rezulta în urma impunerii condițiilor inițiale funcției $u(x, t)$, definită ca fiind suma seriei de funcții trigonometrice (5.46), iar seria cu acești coeficienți astfel determinați va defini soluția problemei la limită cu condiții inițiale (5.28) – (5.30).

Impunând soluției (5.46) prima condiție inițială (5.30) se obține

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x = \varphi(x), \quad (5.48)$$

iar dacă folosim (5.46) și cea de a doua condiție inițială din (5.30), deducem

$$\frac{\pi a}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x = \psi(x). \quad (5.49)$$

Din (5.48) și (5.49) se observă că a_n și b_n sunt coeficienții Fourier ai dezvoltării funcțiilor $\varphi(x)$ și $\psi(x)$ în serii Fourier, mai precis:

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \, dx; \quad (5.50)$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \, dx. \quad (5.51)$$

Deci, soluția ecuației omogene a coardei vibrante de lungime finită (5.28) care satisface condițiile la limită (5.29) și condițiile inițiale (5.30) este dată de suma seriei trigonometrice (5.46), unde coeficienții a_n și b_n sunt dați de (5.50) și respectiv (5.51).

Exemplul 5.5.1. Să se integreze ecuația omogenă a coardei vibrante de lungime două unități

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

cu condițiile la limită

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(2, t) = 0, \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

și condițiile inițiale

$$\begin{cases} u(x, 0) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ 2 - x, & \text{dacă } x \in (1, 2], \end{cases} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Soluție. Se caută soluția de forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi a}{2} t + b_n \sin \frac{n\pi a}{2} t \right) \sin \frac{n\pi}{2} x, \quad (5.52)$$

unde

$$a_n = \int_0^2 \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{2} x dx, \quad b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^2 \psi(x) \sin \frac{n\pi}{2} x dx.$$

Funcția $\psi(x)$ fiind identic nulă pe compactul $[0, 2]$, rezultă că $b_n = 0$. Coeficienții a_n se obțin înlocuind pe $\varphi(x)$ care este egal cu x , dacă $x \in [0, 1]$ și $2 - x$, dacă $x \in (1, 2]$:

$$a_n = \int_0^1 x \sin \frac{n\pi}{2} x dx + \int_1^2 (2 - x) \sin \frac{n\pi}{2} x dx = \frac{8}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2},$$

sau

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = 2k, \\ (-1)^k \frac{8}{n^2 \pi^2}, & \text{dacă } n = 2k + 1. \end{cases}$$

Înlocuind în (5.52) valorile găsite ale coeficienților a_n și b_n se obține soluția problemei la limită cu condiții inițiale, care are expresia

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} a_n \cos \frac{a(2k+1)\pi t}{2} \cdot \sin \frac{n\pi}{2} x, \quad x \in [0, 2].$$

■

5.6 Integrarea ecuației neomogene a coardei vibrante finite cu condiții la limită omogene

Coarda de lungime ℓ execută oscilații întreținute sau forțate atunci când nu este lăsată să vibreze liber, asupra sa acționând o forță perturbatoare $f(x, t)$, în fiecare punct x al ei și la orice moment $t \geq 0$, făcând-o să vibreze continuu. Ecuația coardei vibrante va fi în acest caz neomogenă și va avea forma

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (x, t) \in [0, \ell] \times [0, \infty), \quad (5.53)$$

unde $f(x, t)$ este o forță exterioară dată pe unitatea de masă a coardei și perpendiculară pe axa Ox .

Intenționăm să determinăm soluția ecuației (5.53) care să verifice:

a) condițiile la limită

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(\ell, t) = 0, \end{cases} \quad \forall t \in [0, T];$$

b) condițiile inițiale

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad \forall x \in [0, \ell].$$

Datorită liniarității ecuației coardei vibrante, încercăm să determinăm $u(x, t)$ ca sumă de două funcții

$$u(x, t) = u_p(x, t) + \nu(x, t),$$

unde $\nu(x, t)$ să fie soluția ecuației omogene care să satisfacă aceleași condiții la limită și aceleași condiții inițiale ca și funcția $u(x, t)$, iar $u_p(x, t)$ să fie soluția ecuației neomogene a coardei vibrante de lungime finită, cu condiții

la limită și inițiale nule. Prin urmare, $u_p(x, t)$, căreia îi vom spune *soluție particulară*, este soluția următoarei probleme la limită cu condiții inițiale:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (x, t) \in [0, \ell] \times [0, \infty);$$

$$\begin{cases} u_p(0, t) = 0 \\ u_p(\ell, t) = 0, \end{cases} \quad \forall t \in [0, T];$$

$$\begin{cases} u_p(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial u_p}{\partial t}(x, 0) = 0, \end{cases} \quad \forall x \in [0, \ell].$$

Din rezultatele prezentate anterior, se știe că

$$\nu(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi a}{\ell} t + b_n \sin \frac{n\pi a}{\ell} t \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad (5.54)$$

unde

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx; \\ b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Pentru aflarea soluției particulare $u_p(x, t)$ se utilizează metoda separării variabilelor, luând

$$u_p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad (5.55)$$

care verifică condițiile la limită, deoarece pentru $x = 0$ și $x = \ell$ se anulează fiecare termen al seriei (5.55).

Cunoașterea lui $u_p(x, t)$ cere însă determinarea șirului de funcții $T_n(t)$, care se va realiza din condiția ca $u_p(x, t)$ din (5.55) să verifice ecuația neomogenă a coardei vibrante, adică din condiția

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a^2} T_n''(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x - T_n(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sin \frac{n\pi}{\ell} x \right) \right) = f(x, t). \quad (5.56)$$

În continuare, presupunem că $f(x, t)$ este dezvoltabilă în serie Fourier numai de sinusuri, adică are loc identitatea

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad \forall x \in [0, \ell], \quad \forall t \in [0, \infty), \quad (5.57)$$

unde

$$b_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x, t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx.$$

Înlocuind (5.57) în (5.56), obținem identitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{\ell} \right)^2 T_n(t) \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad \forall x \in [0, \ell], \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (5.58)$$

Deoarece funcțiile $y_n = \sin \frac{n\pi}{\ell} x$ sunt independente funcțional, din (5.58) rezultă

$$T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{\ell} \right)^2 T_n(t) = a^2 b_n(t), \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (5.59)$$

Egalitățile (5.59) reprezintă ecuații diferențiale liniare, neomogene, de ordinul al doilea, cu coeficienți constanți.

Ecuațiile omogene asociate ecuațiilor (5.59)

$$T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 T_n(t) = 0, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (5.60)$$

au ca ecuații caracteristice, ecuațiile de gradul al doilea

$$r^2 + \left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 = 0, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

cu rădăcinile complex conjugate

$$r_1 = i\frac{n\pi a}{\ell}, \quad r_2 = -i\frac{n\pi a}{\ell}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

căroră le corespund sistemele fundamentale de soluții

$$T_{n1} = \cos \frac{n\pi a}{\ell} t, \quad T_{n2} = \sin \frac{n\pi a}{\ell} t, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (5.61)$$

Folosind soluțiile (5.61), construim soluțiile generale T_{n0} ale ecuațiilor omogene asociate (5.60)

$$T_{n0}(t) = \alpha_n \cos \frac{n\pi a}{\ell} t + \beta_n \sin \frac{n\pi a}{\ell} t, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (5.62)$$

unde α_n și β_n sunt constante reale arbitrare.

Soluțiile generale ale ecuațiilor (5.59) sunt astfel

$$T_n(t) = T_{n0}(t) + c_n(t) = \alpha_n \cos \frac{n\pi a}{\ell} t + \beta_n \sin \frac{n\pi a}{\ell} t + c_n(t), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (5.63)$$

unde $c_n(t)$, $n \in \mathbb{N}^*$, sunt soluții particulare ale ecuațiilor neomogene (5.59).

Observația 5.6.1. Integrarea ecuației coardei vibrante de lungime finită s-a făcut cu condiții la limită omogene.

5.7 Integrarea ecuației neomogene a coardei vibrante finite cu condiții la limită neomogene

Considerăm următoarele funcții

$$\begin{aligned} f &: [0, \ell] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, & f &\in C^0([0, \ell] \times [0, T]); \\ g, h &: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, & g, h &\in C^2([0, T]); \\ \varphi, \psi &: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}, & \varphi, \psi &\in C^0([0, \ell]) \end{aligned}$$

și problema la limită cu condiții inițiale în care se cere determinarea funcției

$$u : [0, \ell] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \in C^2([0, \ell] \times [0, T]),$$

ce să satisfacă ecuația cu derivate parțiale de tip hiperbolic

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (x, t) \in [0, \ell] \times [0, T], \quad (5.64)$$

condițiile inițiale

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad \forall x \in [0, \ell] \quad (5.65)$$

și condițiile la limită

$$\begin{cases} u(0, t) = g(t), \\ u(\ell, t) = h(t), \end{cases} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.66)$$

Următoarea teoremă reduce rezolvarea acestei probleme la limită cu condiții inițiale la o problemă de același tip, dar cu condiții la limită omogene. În prealabil, introducem următoarele funcții:

$$\begin{aligned} f^*(x, t) &= f(x, t) - \frac{1}{a^2} \left(g''(t) + \frac{x}{\ell} (h''(t) - g''(t)) \right); \\ \varphi^*(x) &= \varphi(x) - \left(g(0) + \frac{x}{\ell} (h(0) - g(0)) \right); \\ \psi^*(x) &= \psi(x) - \left(g'(0) + \frac{x}{\ell} (h'(0) - g'(0)) \right). \end{aligned} \quad (5.67)$$

Teorema 5.7.1. *Dacă $u^*(x, t)$ este o soluție a ecuației*

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} = f^*(x, t), \quad (x, t) \in [0, \ell] \times [0, T], \quad (5.68)$$

cu condițiile inițiale

$$\begin{cases} u^*(x, 0) = \varphi^*(x), \\ \frac{\partial u^*}{\partial t}(x, 0) = \psi^*(x), \end{cases} \quad \forall x \in [0, \ell] \quad (5.69)$$

și condițiile la limită

$$\begin{cases} u^*(0, t) = 0, \\ u^*(\ell, t) = 0, \end{cases} \quad \forall t \in [0, T], \quad (5.70)$$

atunci

$$u(x, t) = u^*(x, t) + \frac{x}{\ell} (h(t) - g(t)) \quad (5.71)$$

este o soluție a problemei la limită cu condiții inițiale (5.64) – (5.66).

Demonstrație. Derivatele parțiale de ordinul al doilea, nemixte, ale funcției $u(x, t)$ din (5.71) sunt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} + g''(t) + \frac{x}{\ell} (h''(t) - g''(t)). \end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \left(g''(t) + \frac{x}{\ell} (h''(t) - g''(t)) \right) = \\ &= f^*(x, t) + \frac{1}{a^2} \left(g''(t) + \frac{x}{\ell} (h''(t) - g''(t)) \right) = f(x, t), \end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că u din (5.71) este soluție a ecuației (5.64).

Studiem dacă funcția u din (5.71) satisface condițiile inițiale.

Pentru aceasta calculăm $u(x, 0)$ și $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$. Avem:

$$u(x, 0) = u^*(x, 0) + g(0) + \frac{x}{\ell} (h(0) - g(0)) = \varphi^*(x) + g(0) + \frac{x}{\ell} (h(0) - g(0)) = \varphi(x);$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial u^*}{\partial t} + g'(0) + \frac{x}{\ell} (h'(0) - g'(0)) = \psi^*(x) + g'(0) + \frac{x}{\ell} (h'(0) - g'(0)) = \psi(x),$$

deci u verifică condițiile inițiale (5.65).

În plus, avem:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u^*(0, t) + g(t) + \frac{0}{\ell}(h(t) - g(t)) = g(t); \\ u(\ell, t) &= u^*(\ell, t) + g(t) + \frac{\ell}{\ell}(h(t) - g(t)) = h(t), \end{aligned}$$

ceea ce arată că și condițiile la limită (5.66) sunt verificate.

Mai trebuie precizată funcția $u^*(x, t)$.

Pentru aceasta vom utiliza rezultatele stabilite în secțiunea precedentă unde am integrat ecuația neomogenă a coardei vibrante finită cu condiții la limită omogene.

Se verifică simplu că funcția $u^*(x, t)$ dată de

$$\begin{aligned} u^*(x, t) &= \int_0^\ell G(x, t, s) \varphi^*(s) ds + \int_0^t \left(\int_0^\ell G(x, \tau, s) \psi^*(s) ds \right) d\tau + \\ &+ \int_0^t \left(\int_0^{t-\tau} \left(\int_0^\ell G(\xi, \tau, s) f^*(\tau, s) ds \right) d\tau \right) d\xi, \end{aligned} \quad (5.72)$$

unde

$$G(x, t, s) = \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \cdot \cos\left(\frac{ak\pi}{\ell}t\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}s\right) \quad (5.73)$$

este soluția problemei la limită cu condiții inițiale (5.68) – (5.70).

Având funcția $u^*(x, t)$ determinată, rezultă că soluția problemei la limită cu condiții inițiale (5.65) – (5.67) este funcția $u(x, t)$ din (5.71). **q.e.d.**

Exemplul 5.7.1. Să se integreze ecuația cu derivate parțiale de ordinul al doilea

$$\frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t - x,$$

$$\text{cu condițiile inițiale } \begin{cases} u(x, 0) = x + 1, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x \end{cases} \quad \text{și condițiile la limită } \begin{cases} u(0, t) = t, \\ u(2, t) = t + 1. \end{cases}$$

Soluție. Constantele și funcțiile acestei probleme sunt:

$$a = 2; \quad \ell = 2; \quad f(x, t) = t - x; \quad \varphi(x) = x + 1; \quad \psi(x) = x; \quad g(t) = t; \quad h(t) = t + 1. \quad (5.74)$$

Aplicăm teoria prezentată în această subsecțiune cu datele menționate în (5.74).

Pentru aceasta trebuie calculate toate funcțiile indexate superior cu asterisk. Avem

$$\begin{cases} f^*(x, t) &= f(x, t) - \frac{1}{4} \left(g''(t) + \frac{x}{2} (h''(t) - g''(t)) \right) = t - x - \frac{1}{4} \left(0 + \frac{x}{2} (0 - 0) \right) = t - x; \\ \varphi^*(x) &= \varphi(x) - \left(g(0) + \frac{x}{2} (h(0) - g(0)) \right) = x + 1 - \left(0 + \frac{x}{2} (1 - 0) \right) = \frac{x+2}{2}; \\ \psi^*(x) &= \psi(x) - \left(g'(0) + \frac{x}{2} (h'(0) - g'(0)) \right) = x - \left(1 + \frac{x}{2} (1 - 1) \right) = x - 1. \end{cases} \quad (5.75)$$

Folosind (5.73), în care se introduc primele două date din (5.74), se determină funcția $G(x, t, s)$, iar dacă rezultatul găsit se introduce în (5.72), aflăm funcția $u^*(x, t)$. În final, soluția problemei la limită cu condiții inițiale este dată de

$$u(x, t) = u^*(x, t) + t + \frac{x}{2}.$$

■

5.8 Principiul lui Duhamel pentru determinarea unei soluții particulare a ecuației neomogene a coardei vibrante finite

Teorema 5.8.1. Dacă pentru fiecare τ fixat, notăm $w(x, t, \tau)$ soluția ecuației

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (5.76)$$

care verifică condițiile inițiale

$$\begin{cases} w(x, 0, \tau) = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0, \tau) = a^2 f(x, \tau) \end{cases} \quad (5.77)$$

și condițiile la limită

$$\begin{cases} w(0, t, \tau) = 0, \\ w(\ell, t, \tau) = 0, \end{cases} \quad (5.78)$$

unde τ este un parametru, atunci funcția

$$u_p(x, t) = \int_0^t w(x, t - \tau, \tau) d\tau \quad (5.79)$$

verifică ecuația vibrațiilor coardei finite

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (5.80)$$

cu condițiile inițiale omogene

$$\begin{cases} u_p(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial u_p}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (5.81)$$

și condițiile la limită omogene

$$\begin{cases} u_p(0, t) = 0, \\ u_p(\ell, t) = 0. \end{cases} \quad (5.82)$$

Demonstrație. Funcția u_p din (5.79) este o integrală depinzând de doi parametri, x și t . Conform ipotezelor, rezultă că u_p este de două ori diferențiabilă, iar derivatele parțiale se determină prin formula lui Leibniz de derivare a unei integrale depinzând de parametru [14][p. 65]. Mai întâi, avem:

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2}(x, t) = \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t - \tau, \tau) d\tau. \quad (5.83)$$

Apoi,

$$\frac{\partial u_p}{\partial t}(x, t) = \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(x, t - \tau, \tau) d\tau + w(x, 0, t). \quad (5.84)$$

Ținând seama de (5.77), din (5.84) se obține o nouă integrală care depinde de doi parametri

$$\frac{\partial u_p}{\partial t}(x, t) = \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(x, t - \tau, \tau) d\tau, \quad (5.85)$$

căreia, dacă îi aplicăm formula lui Leibniz, deducem

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2}(x, t) = \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t - \tau, \tau) d\tau + \frac{\partial w}{\partial t}(x, t, 0). \quad (5.86)$$

Având în vedere cea de a doua condiție inițială din (5.77), rezultă că (5.86) devine

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2}(x, t) = \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t - \tau, \tau) d\tau + a^2 f(x, t). \quad (5.87)$$

Impunând ca $u_p(x, t)$ să satisfacă (5.80) și ținând cont de (5.83) și (5.87), ajungem la

$$\frac{1}{a^2} \left(a^2 f(x, t) + \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t - \tau, \tau) d\tau \right) - \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t - \tau, \tau) d\tau = f(x, t)$$

sau

$$\int_0^t \left(\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t - \tau, \tau) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t - \tau, \tau) \right) d\tau = 0,$$

ceea ce este adevărat deoarece $w(x, t, \tau)$ este soluția ecuației omogene (5.76).

Din (5.79) și (5.85) rezultă că ambele condiții inițiale (5.81) sunt îndeplinite.

De asemeni, condițiile la limită (5.82) sunt satisfăcute deoarece funcția w verifică condițiile la limită (5.78).

Astfel, teorema este demonstrată.

q.e.d.

5.9 Ecuația de echilibru a unei membrane elastice

Se numește *membrană elastică* o foaie întinsă, perfect flexibilă și care opune rezistență la întindere. Lucrul mecanic efectuat de către o forță externă, pentru a deforma un sector al membranei, este proporțional cu deformația. Coeficientul de proporționalitate T , indiferent de forma și poziția acestui sector, se numește *tensiunea membranei*.

Vom deduce ecuația pe care trebuie să o verifice o membrană aflată în echilibru, presupunând că la momentul inițial ea ocupă în planul xOy un domeniu D , mărginit de o curbă L , suficient de regulată. Forțele elastice interne produc un lucru mecanic egal și de semn contrar cu cel datorat forțelor externe. Fie $f(M)$ densitatea, într-un punct $M \in D$, a forței perpendiculare pe planul xOy . Sub acțiunea acestei forțe, membrana trece într-o nouă stare, descrisă de ecuația $u = u(M)$, sau $u = u(x, y)$, unde x și y sunt coordonatele carteziene ale punctului M . Presupunem că deformarea membranei este mică, ceea ce înseamnă că vom neglija puterile superioare lui 2 ale derivatelor parțiale $\frac{\partial u}{\partial x}$ și $\frac{\partial u}{\partial y}$. Presupunem în plus că, sub acțiunea forțelor externe, punctele membranei nu se deplasează decât pe perpendiculara la planul xOy astfel încât coordonatele x, y ale unui punct arbitrar nu se modifică.

Lucrul mecanic al forței externe $f(x, y)$, care a produs deplasarea membranei din poziția sa inițială ($u = 0$, $M(x, y) \in D$), în poziția descrisă de ecuația $u = u(x, y)$, $M(x, y) \in D$, este egal cu

$$\iint_D f(x, y) u(x, y) dx dy.$$

În decursul deplasării, variația ariei membranei este

$$\iint_D \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right)^2} - 1 \right) dx dy,$$

iar lucrul mecanic al forțelor elastice interne este egal cu

$$-T \iint_D \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right)^2} - 1 \right) dx dy \approx \frac{-T}{2} \iint_D \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right)^2 \right) dx dy.$$

Prin urmare, lucrul mecanic total se scrie

$$A(u) = \iint_D \left(\frac{-T}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right)^2 + f(x, y) u(x, y) \right) dx dy. \quad (5.88)$$

Variația funcționalei (5.88) se exprimă prin

$$\delta A(u) = \iint_D (-T(u_x \delta u_x + u_y \delta u_y) + f \delta u) dx dy,$$

unde, pentru comoditatea scrierii, am notat derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției u cu u_x , respectiv u_y .

Conform principiului deplasărilor virtuale, în poziția de echilibru $u = u(x, y)$ are loc relația $\delta A(u) = 0$, pentru toate variabilele admisibile $\delta u(x, y)$. Utilizând prima identitate a lui Green (3.86), sau [15][p.137], avem

$$\iint_D (u_x \delta u_x + u_y \delta u_y) + f \delta u dx dy = \int_L \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \delta u ds - \iint_D \nabla^2 u \delta u dx dy,$$

unde \mathbf{n} este versorul normalei exterioare la conturul L și $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ este derivata câmpului scalar u pe direcția versorului \mathbf{n} (vezi (3.13)), obținem

$$\delta A(u) = -T \int_L \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \delta u ds + \iint_D (T \nabla^2 u + f) \delta u dx dy = 0. \quad (5.89)$$

Deoarece orice funcție indefinit diferențiabilă în D și egală cu zero pe frontieră este o funcție admisibilă, presupunând că $u(x, y)$ și $f(x, y)$ sunt suficient de regulate, egalitatea (5.89) implică

$$T \nabla^2 u = -f(x, y), \quad \forall M(x, y) \in D, \quad (5.90)$$

unde ∇^2 este operatorul lui Laplace în două dimensiuni

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Ecuația cu derivate parțiale de ordinul al doilea de tip eliptic (5.90) este denumită *ecuația de echilibru* a membranei elastice.

În continuare vom stabili condițiile la limită.

- a) Dacă marginea membranei este *fixată rigid*, nu se produce nici o deplasare a punctelor de pe conturul L și prin urmare

$$u(x, y) = 0, \quad \forall M(x, y) \in L. \quad (5.91)$$

- b) Dacă marginea membranei este *liberă* ea se poate deplasa liber pe suprafața laterală a cilindrului cu generatoarele perpendiculare pe planul xOy și curba directoare conturul L . În acest caz, δu este arbitrară în D și pe L , iar condiția (5.89) implică

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, y) = 0, \quad \forall M(x, y) \in L. \quad (5.92)$$

- c) Dacă marginea membranei este *supusă unei forțe* cu densitatea liniară f_1 , integrala curbilinie din (5.89) se înlocuiește cu

$$\int_L \left(-T \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + f_1 \right) \delta u ds,$$

iar δu fiind arbitrară de-a lungul lui L , rezultă

$$-T \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, y) + f_1(x, y) = 0, \quad \forall M(x, y) \in L. \quad (5.93)$$

- d) Dacă marginea membranei este *fixată elastic*, cu o forță $-ku$, unde k exprimă rigiditatea legăturii, condiția la limită se obține înlocuind cu $=ku$ pe f_1 în ecuația (5.93). Astfel rezultă condiția

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, y) + hu(x, y) = 0, \quad \forall M(x, y) \in L, \quad (5.94)$$

unde $h = \frac{k}{T}$.

5.10 Ecuația de mișcare a unei membranei elastice

Vom stabili acum *ecuația de mișcare a unei membranei elastice*.

În acest scop, fie $u = u(x, y, t)$ funcția care descrie poziția membranei la momentul t . Conform principiului lui d'Alembert, funcția $u(x, y, t)$ este soluția ecuației diferențiale

$$T\nabla^2 u = -\left(f(x, y, t) - \rho(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t)\right),$$

unde $f = f(x, y, t)$ este *densitatea forței externe*, iar $\rho(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t)$ este *densitatea forței de inerție*.

Așadar, *ecuația de mișcare a unei membrane elastice* are forma

$$a^2 \nabla^2 u - u_{tt} = F(x, y, t), \quad \text{unde} \quad a^2 = \frac{T}{\rho}, \quad F(x, y, t) = -\frac{f(x, y, t)}{\rho(x, y)}, \quad (5.95)$$

unde pentru derivata parțială secundă în raport cu timpul t am utilizat notația mai simplă $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u_{tt}$.

Din punct de vedere fizic, este clar că, pentru a descrie oscilațiile în mod univoc, trebuie ca în afara ecuației (5.95) și a condiției la limită (una, oricare, din condițiile **a**)–**d**), să se precizeze *poziția inițială* (forma membranei) la momentul inițial $t = 0$ și *vitezele inițiale* ale punctelor membranei.

Se formulează așadar, pentru ecuația cu derivate parțiale de ordinul al doilea de tip hiperbolic (5.95), următoarea problemă la limită cu condiții inițiale: să se afle o funcție $u : D \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, de două ori diferențiabilă în D pentru $t \geq 0$, soluție a ecuației vibrațiilor libere ale membranei elastice, care să verifice una din cele cinci condiții la limită **a**)–**d**), în care (x, y) trece în (x, y, t) , și să satisfacă de asemenea condițiile inițiale

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad \forall M(x, y) \in D,$$

unde φ și ψ sunt funcții date.

5.11 Oscilațiile libere ale unei membrane elastice circulare

Scopul acestui paragraf este acela de a găsi oscilațiile libere ale unei membrane elastice circulare de rază R cu condiții la limită și inițiale date. Pentru simplitate, considerăm că data la limită este nulă. Deci, problema constă în găsirea funcției $u(r, \theta, t)$, care ține loc de înălțimea membranei față de planul în care s-a ales reperul polar (r, θ) , care satisface ecuația oscilațiilor libere ale membranei scrisă în coordonate polare [9]

$$u_{tt} = a^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \right), \quad (r, \theta) \in (0, R) \times [0, 2\pi), \quad (5.96)$$

condiția la limită nulă

$$u(R, \theta, t) = 0 \quad (5.97)$$

și condițiile inițiale

$$\begin{cases} u(r, \theta, 0) = f(r, \theta), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) = g(r, \theta), \end{cases} \quad (5.98)$$

unde f și g sunt funcții date.

Pentru a rezolva problema la limită cu condiții inițiale (5.96) – (5.98), reamintim problema vibrațiilor libere ale coardei care a implicat *superpoziția* unui număr infinit de oscilații simple.

Dacă abordăm membrana într-un mod similar, vom căuta soluții de forma

$$u(r, \theta, t) = U(r, \theta) \cdot T(t). \quad (5.99)$$

Expresia (5.99) dă forma $U(r, \theta)$ a oscilațiilor înmulțite cu *factorul oscilator* $T(t)$. Procedând la înlocuire în ecuația cu derivate parțiale ale oscilațiilor libere ale membranei, ajungem la ecuațiile

$$\nabla^2 U + \lambda^2 U = 0 \quad (\text{ecuație de tip Helmholtz}), \quad (5.100)$$

$$T'' + \lambda^2 a^2 T = 0 \quad (\text{mișcare armonică simplă}), \quad (5.101)$$

unde

$$\nabla^2 U = U_{rr} + \frac{1}{r^2} U_r + \frac{1}{r^2} U_{\theta\theta}$$

este *operatorul lui Laplace în coordonate polare în plan*, aplicat funcției $U = U(r, \theta)$.

Din sensul fizic al problemei rezultă că funcția $U = U(r, \theta)$ este o funcție periodică de θ , cu perioada 2π , adică

$$U(r, \theta) = U(r, \theta + 2\pi) \quad (5.102)$$

și că această funcție este mărginită în centrul discului, adică

$$|U(0, \theta)| < \infty. \quad (5.103)$$

Să remarcăm că de la început am presupus constanta de separare să fie negativă (deci, am notat-o cu $-\lambda^2$) deoarece dorim ca $T(t)$ să fie funcție periodică.

În următoarea etapă, dorim să rezolvăm ecuația Helmholtz, însă, mai întâi, este necesară condiția la limită. Pentru a afla aceasta, înlocuim (5.99) în condiția la limită (5.97), din care deducem

$$u(R, \theta, t) = U(R, \theta) \cdot T(t) = 0, \quad 0 < t < \infty$$

sau

$$U(R, \theta) = 0. \quad (5.104)$$

Folosind pentru problema (5.100), (5.102), (5.103), (5.104) metoda separării variabilelor, avem

$$U(r, \theta) = \Phi(r) \cdot Z(r) \quad (5.105)$$

și din (5.100) obținem ecuațiile

$$\begin{cases} \Phi''(\theta) + \nu^2 \Phi(\theta) = 0, \\ Z''(r) + \frac{1}{r} Z'(r) + \left(\lambda^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) Z(r) = 0. \end{cases} \quad (5.106)$$

În baza relațiilor (5.103) și (5.104), trebuie să fie îndeplinite condițiile

$$\begin{cases} Z(R) = 0, \\ |Z(0)| < \infty. \end{cases} \quad (5.107)$$

Din (5.102) și (5.106)₁ obținem $\nu = n$, unde n este un număr natural, și

$$\Phi_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta. \quad (5.108)$$

Efectuând substituția $\lambda r = x$ în ecuația (5.106)₂, necunoscuta devine funcție de variabila x , pe care o notăm cu $y(x)$. Dacă în egalitatea $Z(r) = y(x)$ derivăm în raport cu r de două ori și ținem cont că $\frac{dx}{dr} = \lambda$, găsim:

$$\begin{cases} Z'(r) = \frac{d}{dr} y(x) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dr} = y'(x) \cdot \lambda = \lambda \cdot y'(x); \\ Z''(r) = \frac{d}{dr} Z'(r) = \frac{d}{dr} (\lambda y'(x)) = \frac{d}{dx} (\lambda y'(x)) \cdot \frac{dx}{dr} = \lambda y''(x) \cdot \lambda = \lambda^2 \cdot y''(x). \end{cases}$$

Așadar,

$$\begin{cases} Z(r) = y(x), \\ Z'(r) = \lambda y'(x), \\ Z''(r) = \lambda^2 y''(x). \end{cases} \quad (5.109)$$

Dacă folosim (5.109) în ecuația diferențială (5.106)₂, aceasta devine

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (5.110)$$

în care recunoaștem *ecuația diferențială a lui Bessel* [24].

Se știe că soluția generală a ecuației (5.110) este de forma

$$y_\nu(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x),$$

unde $J_\nu(x)$ și $Y_\nu(x)$ sunt funcțiile lui Bessel de ordinul ν , de speța *I* și *II* respectiv [21], [24][Cap. 3].

Revenind la ecuația (5.106)₂, constatăm că soluția sa generală, în cazul $\nu = n$, este

$$Z_n(r) = c_n J_n(\lambda r) + d_n Y_n(\lambda r).$$

Deoarece în vecinătatea punctului $x = 0$, funcția $J_n(x)$ este mărginită, iar funcția $Y_n(x)$ este nemărginită, în baza relației (5.107)₂ rezultă că $d_n = 0$. Deci, soluția generală a ecuației Bessel (5.106)₂ este

$$Z_n(r) = c_n J_n(\lambda r). \quad (5.111)$$

Din condiția (5.104), obținem $J_n(\lambda R) = 0$. Punând $\lambda R = \mu$, obținem ecuația $J_n(\mu) = 0$. Fie k_{n1}, k_{n2}, \dots , soluțiile ei pozitive, adică

$$J_n(k_{nm}) = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (5.112)$$

Atunci, din (5.111) obținem că funcțiile

$$Z_{n,m}(r) = J_n\left(\frac{k_{nm}}{R}r\right) \quad (5.113)$$

sunt soluțiile problemei (5.106)₂ și (5.107).

Din relațiile (5.99), (5.101), (5.105), (5.108), (5.113) rezultă că funcțiile

$$\begin{aligned} u_{nm}(r, \theta, t) &= \left(\left(A_{nm} \cos \frac{ak_{nm}}{R}t + B_{nm} \sin \frac{ak_{nm}}{R}t \right) \cos n\theta + \right. \\ &\quad \left. + \left(C_{nm} \cos \frac{ak_{nm}}{R}t + D_{nm} \sin \frac{ak_{nm}}{R}t \right) \sin n\theta \right) J_n\left(\frac{k_{nm}}{R}r\right) \end{aligned} \quad (5.114)$$

sunt soluțiile particulare ale ecuației (5.96), denumite *oscilații fundamentale*. Aceste soluții satisfac condiția la limită (5.97).

Căutăm soluția problemei la limită cu condiții inițiale (5.96) – (5.98) sub forma seriei de funcții

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{nm}(r, \theta, t), \quad (5.115)$$

unde funcțiile u_{nm} sunt definite prin formulele (5.114). Calculând derivata funcției u și impunând condițiile inițiale (5.98), obținem

$$\begin{cases} f(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_{nm} \cos n\theta + C_{nm} \sin n\theta \right) J_n\left(\frac{k_{nm}}{R}r\right), \\ g(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{ak_{nm}}{R} \left(B_{nm} \cos n\theta + D_{nm} \sin n\theta \right) J_n\left(\frac{k_{nm}}{R}r\right). \end{cases} \quad (5.116)$$

Dezvoltând funcția $f(r, \theta)$ ca funcție periodică de θ în serie Fourier

$$f(r, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(r) \cos n\theta + \beta_n(r) \sin n\theta,$$

unde

$$\begin{cases} \alpha_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta) \cos n\theta d\theta, & n \in \mathbb{N}, \\ \beta_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r, \theta) \sin n\theta d\theta, & n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad (5.117)$$

și comparând această dezvoltare cu formula (5.116), rezultă

$$\begin{cases} \alpha_0(r) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} A_{0m} J_0\left(\frac{k_{0m}}{R} r\right) \\ \alpha_n(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} J_n\left(\frac{k_{nm}}{R} r\right) \\ \beta_n(r) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} J_n\left(\frac{k_{nm}}{R} r\right). \end{cases} \quad (5.118)$$

Pe de altă parte, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ fixat, șirul de funcții $\left(J_n(k_{nm}x)\right)_{m \geq 1}$, unde k_{nm} sunt rădăcini ale ecuației $J_n(x) = 0$, este un șir ortogonal cu ponderea x pe intervalul $[0, 1]$, adică

$$\int_0^1 x J_n(k_{np}x) J_n(k_{nq}x) dx = \begin{cases} 0, & \text{pentru } q \neq p \\ \frac{1}{2} J_{n+1}^2(k_{np}), & \text{pentru } q = p. \end{cases} \quad (5.119)$$

Să notăm generic prin $w(r)$, oricare din funcțiile membrilor întâi din (5.118). Această funcție poate fi dezvoltată în serie Fourier–Bessel

$$w(r) = \sum_{s=1}^{\infty} a_s J_n\left(\frac{k_{ns}}{R} r\right), \quad (5.120)$$

coeficienții dezvoltării determinându-se prin formula

$$a_s = \frac{2}{R^2 J_{n+1}^2(k_{ns})} \int_0^R \tau w(\tau) J_n\left(\frac{k_{ns}}{R} \tau\right) d\tau. \quad (5.121)$$

În continuare vom arăta cum se determină coeficienții C_{nm} . Folosind rezultatele din (5.119)–(5.121), ultima relație din (5.118) devine

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{2}{R^2 J_{n+1}^2(k_{ns})} \int_0^R \tau \beta_n(\tau) J_n\left(\frac{k_{ns}}{R} \tau\right) d\tau J_n\left(\frac{k_{ns}}{R} r\right) = \sum_{q=1}^{\infty} C_{np} J_n\left(\frac{k_{nq}}{R} r\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.122)$$

Înmulțim egalitatea (5.122) cu $r J_n\left(\frac{k_{np}}{R} r\right)$ după care integrăm între 0 și R . În urma acestor operațiuni, folosind relația (5.119), obținem

$$C_{np} = \frac{2}{R^2 J_{n+1}^2(k_{np})} \int_0^R \tau \beta_n(\tau) J_n\left(\frac{k_{np}}{R} \tau\right) d\tau.$$

Coeficienții A_{nm} se determină asemănător.

Pentru a determina coeficienții B_{nm} și D_{nm} plecăm de la dezvoltarea în serie Fourier a funcției $g(r, \theta)$ și se urmărește raționamentul de mai sus, derulat după egalitățile (5.116).

În acest mod, problema la limită cu condiții inițiale este complet rezolvată.

Să încercăm să determinăm soluția problemei (5.96), (5.97), (5.98) într-un caz particular [18][p. 238] și anume când funcția u este independentă de variabila θ , situație frecvent întâlnită cunoscută sub numele de *problemă axial-simetrică*. Aceasta presupune ca în locul condițiilor (5.98) trebuiesc considerate condițiile

$$\begin{cases} u(r, \theta, 0) = f(r) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) = 0, \end{cases} \quad (5.123)$$

cu mențiunea că nu este nici o dificultate să considerăm și cazul în care $\frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) \neq 0$. Cu aceste presupuneri, soluția problemei corespunzătoare devine

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0(k_{0m}r) \cos k_{0m}at, \quad (5.124)$$

scopul fiind acela de a găsi A_m astfel încât

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0(k_{0m}r). \quad (5.125)$$

Pentru a găsi constantele A_m , folosim condiția de ortogonalitate (5.119) în care considerăm că $n = 0$, adică

$$\int_0^1 r J_0(k_{0m}r) J_0(k_{0q}r) dr = \begin{cases} 0, & \text{pentru } m \neq q \\ \frac{1}{2} J_1^2(k_{0q}), & \text{pentru } m = q. \end{cases} \quad (5.126)$$

Calculul acestei integrale poate fi găsit în multe cărți despre funcții Bessel. De exemplu, [21] este una din cele mai bune cărți de tabele, în care sunt tabelate rădăcinile funcțiilor Bessel.

Multiplicând fiecare membru al ecuației (5.125) cu $r J_0(k_{0q}r)$, integrând de la 0 la 1 și folosind (5.126), obținem

$$A_q \int_0^1 r J_0^2(k_{0q}r) dr = \int_0^1 r f(r) J_0(k_{0q}r) dr$$

din care putem determina pentru A_q valoarea

$$A_q = 2 \int_0^1 r f(r) J_0(k_{0q}r) dr / J_1^2(k_{0q}), \quad q = 1, 2, \dots \quad (5.127)$$

Oscilațiile membranei circulare de rază $R = 1$, independente de unghiul polar θ , sunt descrise de funcția $u(r, t)$ din (5.124), unde coeficienții sunt dați de relațiile (5.127).

Această soluție nu este așa de complicată cum pare la prima vedere. O putem interpreta ca fiind dezvoltarea *condiției inițiale* $f(r)$ exprimată prin suma

$$f(r) = A_1 J_0(k_{01}r) + A_2 J_0(k_{02}r) + A_3 J_0(k_{03}r) + \dots$$

urmată de inserarea *factorului oscilant* $\cos(k_{0m}at)$ în fiecare termen; adică

$$u(r, t) = A_1 J_0(k_{01}r) \cos(k_{01}at) + A_2 J_0(k_{02}r) \cos(k_{02}at) + A_3 J_0(k_{03}r) \cos(k_{03}at) + \dots$$

De exemplu, oscilațiile membranei circulare, de rază $R = 1$, cu condițiile inițiale

$$\begin{cases} u(r, \theta, 0) = J_0(2.4r) + 0.5 J_0(8.65r), \\ u_t(r, \theta, 0) = 0 \end{cases}$$

trebuie să fie date de

$$u(r, t) = J_0(2.4r) \cos(2.4at) + 0.5 J_0(8.65r) \cos(8.65at).$$

Capitolul 6

Probleme de tip difuzie (Ecuații de tip parabolic)

6.1 Ecuația diferențială a propagării căldurii

În situațiile în care într-o anumită regiune din spațiu temperatura nu este constantă, se produce fenomenul deplasării unui *flux de căldură* de la punctele cu temperatură mai înaltă la puncte de temperaturi scăzute, fenomen care poartă numele de *propagarea căldurii*.

După cum vom vedea în continuare, modelarea matematică a acestui fenomen se realizează printr-o ecuație cu derivate parțiale de ordinul al doilea de tip parabolic. Ecuația corespunzătoare se stabilește plecând de la *legea lui Fourier*. Conform acestei legi, cantitatea de căldură Q care trece în intervalul de timp δt prin aria infinitesimală sau *elementul de arie* δS , interioară corpului considerat, este dată de formula

$$Q = -k(\mathbf{x}, u) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) \delta S \delta t, \quad (6.1)$$

unde \mathbf{n} este versorul normalei la suprafață în sensul temperaturilor descrescătoare, $k(\mathbf{x}, u)$ este *coeficientul conductibilității termice*, iar $u(\mathbf{x}, t)$ este *temperatura* corpului în punctul de vector de poziție $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ la momentul t . Presupunem corpul *izotrop* din punct de vedere al proprietăților termice, prin urmare, $k(\mathbf{x}, u)$ nu depinde de orientarea ariei. Pentru a stabili ecuația, izolăm în interiorul corpului paralelipipedul [9]

$$\Pi = \{M(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mid x_j < \xi_j < x_j + \delta x_j, \ j = 1, 2, 3\},$$

cu fețele paralele cu planele de coordonate, și să determinăm bilanțul său termic. Pe baza legii lui Fourier (6.1), paralelipipedul Π , prin fața $\xi_1 = x_1$, primește sau cedează cantitatea de căldură

$$Q' = -k(\mathbf{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathbf{x}, t) \delta x_2 \delta x_3 \delta t,$$

în timp ce prin fața opusă $\xi_1 = x_1 + \delta x_1$, cantitatea de căldură cedată sau primită este

$$Q'' = k(x_1 + \delta x_1, x_2, x_3, u(x_1 + \delta x_1, x_2, x_3, t)) \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1 + \delta x_1, x_2, x_3, t) \delta x_2 \delta x_3 \delta t.$$

Bilanțul termic prin cele două fețe opuse va fi suma celor două cantități de căldură. Dacă aplicăm lema fundamentală a calculului diferențial [13], până la infiniti mici de ordin superior în raport cu δx_1 , δx_2 , δx_3 , δt , cantitatea totală de căldură $Q' + Q''$ are expresia

$$Q' + Q'' = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k(\mathbf{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) (\mathbf{x}, t) \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \delta t.$$

În mod analog se calculează fluxul de căldură care se produce prin celelalte fețe. Astfel, cantitatea de căldură δQ , care străbate suprafața paralelipipedului Π în timpul δt , este

$$\delta Q = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k(\mathbf{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \delta t = \nabla \cdot (k \nabla u).$$

Presupunem că schimbul termic se produce de prezența unor surse de căldură a căror densitate convenim să o notăm cu $F(\mathbf{x}, t)$. Cantitatea de căldură pe care sursele o cedează paralelipipedului Π în timpul δt este

$$\delta Q_1 = F(\mathbf{x}, t) \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \delta t. \quad (6.2)$$

Astfel, în timpul δt corpul primește în total cantitatea de căldură

$$\delta Q_2 = \delta Q + \delta Q_1. \quad (6.3)$$

Pe de altă parte, cantitatea de căldură Q_2 poate fi definită în funcție de creșterea temperaturii în paralelipipedul Π în intervalul de timp δt , în următorul mod: dacă $\rho(\mathbf{x})$ este densitatea materialului din care este confecționat paralelipipedul și $c(\mathbf{x})$ este căldura sa specifică, atunci

$$\delta Q_2 = \left(u(\mathbf{x}, t + \delta t) - u(\mathbf{x}, t) \right) \rho(\mathbf{x}) c(\mathbf{x}) \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3. \quad (6.4)$$

Aplicând iarăși lema fundamentală a calculului infinitezimal, din (6.4) obținem

$$\delta Q_2 = \rho(\mathbf{x}) c(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \delta t. \quad (6.5)$$

Egalăm (6.3) cu (6.5) și înlocuim δQ și δQ_1 . Obținem

$$\rho(\mathbf{x}) c(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot (k \nabla u) + F(\mathbf{x}, t). \quad (6.6)$$

Dacă coeficientul conductivității termice k depinde efectiv de temperatura u , atunci (6.6) este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul al doilea, neliniară. Dacă însă k nu depinde de u , adică $k(\mathbf{x}, u) = k(\mathbf{x})$, atunci (6.6) devine liniară. În cazul unui corp omogen, avem

$$\rho(\mathbf{x}) = \text{const.}, \quad c(\mathbf{x}) = \text{const.}, \quad k(\mathbf{x}) = \text{const.}$$

și ecuația (6.6) se scrie sub forma

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = a^2 (\nabla^2 u)(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t), \quad (6.7)$$

unde

$$a^2 = \frac{k}{\rho c}, \quad f(\mathbf{x}, t) = \frac{F(\mathbf{x}, t)}{\rho c}.$$

Ecuațiile (6.6) sau (6.7) se numesc *ecuații de propagare a căldurii*.

Dacă $f(\mathbf{x}, t) = 0$, în domeniul tridimensional ocupat de corp are loc fenomenul de răcire al materialului din care este confecționat corpul, până la o uniformizare a temperaturii la valoare constantă, dacă domeniul ocupat de corp este izolat termic de exteriorul său. În acest caz, fenomenul de răcire este descris de ecuația

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = a^2 (\nabla^2 u)(\mathbf{x}, t). \quad (6.8)$$

Termenul $a^2 (\nabla^2 u)(\mathbf{x}, t)$ poartă numele de *difuzie*, iar problemele fizice în care este implicată ecuația (6.6) sau (6.7) se numesc *probleme de tip difuzie*. Coeficientul a^2 se numește *difuzivitatea termică* a mediului prin care are loc propagarea căldurii.

În general, difuzia poate fi definită ca mișcarea particulelor dintr-un domeniu de concentrație mare spre o regiune cu concentrație mai scăzută.

Difuzia apare ca un rezultat al legii a doua a termodinamicii care afirmă că *entropia* sau *dezordinea* oricărui sistem trebuie să crească în timp întotdeauna.

Difuzia este importantă în multe fenomene ale vieții fiind de mare interes datorită diverselor aplicații din geofizică și industrie. În acest sens menționăm de exemplu faptul că companiile petrolifere sunt interesate în procesul *difuziei termoelastice* pentru o extracție mai eficientă a țițeiului din depozitele subterane.

Difuzia termoelastică într-un solid elastic se datorează cuplării câmpului termic, difuziei masei, din care este alcătuit corpul, și *deformarea solidului*, presupusă a fi elastică.

Cel care a avut preocupări majore în teoria difuziei în *termoelasticitate* a fost renumitul matematician polonez Witold Nowacki care a dezvoltat modelul matematic al *termoelasticității cuplate*, care implică printre altele viteze infinite ale *propagării undelor elastice*.

De cele mai multe ori, în cărțile sau articolele în care se studiază aspecte ale propagării căldurii din punct de vedere ingineresc, pentru coordonatele carteziene x_1, x_2, x_3 se folosește notația x, y, z , astfel că ecuația (6.7) se scrie în forma

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}).$$

6.1.1 Condiție inițială

Toate problemele fizice care se petrec într-un corp C trebuie să pornească de la o anumită valoare a timpului, notată în general $t = 0$, astfel că, pentru descrierea univocă a propagării căldurii în corpul C , în afara ecuației (6.6) sau (6.7), trebuie specificată temperatura la acest moment în toate punctele corpului, numită *temperatură inițială*, adică

$$u(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}), \quad (6.9)$$

unde φ este o funcție reală dată definită în toate punctele corpului, deci $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R}$.

În studiul ecuației propagării căldurii, egalitatea (6.9) poartă denumirea de *condiție inițială*.

6.1.2 Condiții pe frontieră sau condiții la limită

Toate problemele fizice au frontiere de un anumit tip, astfel că trebuie să descriem matematic ce se petrece pe acea frontieră pentru a caracteriza în mod adecvat problema fizică considerată, cu alte cuvinte trebuie să descriem *regimul termic pe frontieră*, sau *condiția la limită*.

În cazul unei frontiere S a corpului C , *menținută la o temperatură* dată, condiția la limită se scrie

$$u(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in S, \quad \forall t \geq 0, \quad (6.10)$$

unde ψ este o funcție reală dată, definită în punctele frontierei corpului, la orice moment $t \geq 0$ al studiului fenomenului termic.

Dacă prin frontiera S trece un *flux de căldură* q , condiția la limită se scrie sub forma

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in S, \quad \forall t \geq 0, \quad (6.11)$$

unde $h = \frac{q}{\alpha}$, α fiind coeficientul de schimb la suprafață, iar \mathbf{n} este normala unitară exterioară în punctul $\mathbf{x} \in S$. În particular, dacă C este un *corp izolat termic* pe frontiera S , atunci $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_S = 0$. Dacă temperatura mediului ambiant este dată, se presupune că schimburile de căldură au loc conform legii lui Newton, adică $q|_S = \alpha(u_1 - u)|_S$, unde q este fluxul termic, α este coeficientul de schimb la suprafață, iar u_1 este temperatura mediului ambiant. Pe de altă parte, în baza legii lui Fourier, corpul primește în unitatea de timp, prin unitatea de arie a lui S , fluxul $q_1 = k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$. Cele două fluxuri trebuie să fie egale, adică $k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \alpha(u_1 - u)|_S$ sau

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \kappa u \right)(\mathbf{x}, t) = \varphi_1(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in S, \quad \forall t \geq 0, \quad (6.12)$$

unde $\kappa = \frac{\alpha}{k}$ și $\varphi_1 = h u_1$.

Condițiile la limită sunt restricții impuse pe frontierele domeniului de analiză. Aceste restricții pot fi de două tipuri:

1. condiții la limită de tip Dirichlet¹ (numite și *condiții esențiale*), în care se impun valorile variabilei dependente pe frontiera specificată (vezi (6.10));
2. condiții la limită de tip Neumann² (numite și *naturale*), în care se impune gradientul variabilei dependente în direcție normală pe frontiera specificată (vezi (6.11)).

Dacă pe frontiera specificată se impun atât condiții Dirichlet, cât și Neumann, se vorbește de *condiții de tip Cauchy*.

Dacă pe frontiera specificată se impun combinații liniare de condiții Dirichlet și Neumann se vorbește despre *condiții de tip Robin*.

Dacă pe diferite părți ale frontierei domeniului se impun condiții la limită de tipuri diferite se spune că este vorba despre *condiții mixte*.

6.2 Alte ecuații de tip difuzie

6.2.1 Căldura superficială pierdută, proporțională cu diferența de temperatură

Ecuația cu derivate parțiale de ordinul al doilea de tip parabolic

$$u_t = a^2 \nabla^2 u - \beta(u - u_1), \quad \beta > 0, \quad (6.13)$$

descrie fluxul de căldură printr-un corp datorat atât fenomenului de difuzie, cuantificat prin termenul $a^2 \nabla^2 u$, cât și pierderii sau câștigării căldurii prin suprafața corpului. Căldura pierdută ($u < u_1$) sau câștigată ($u > u_1$) este proporțională cu diferența între temperatura $u(\mathbf{x}, t)$ a corpului și temperatura mediului înconjurător u_1 , cu β constanta de proporționalitate. Dacă β este foarte mare în contrast cu coeficientul de difuzivitate a^2 , atunci fluxul de căldură din interiorul corpului, de tip *încoace și încolo*, prin suprafața corpului, va fi mai mic în comparație cu fluxul de tip *înspre și dinspre* suprafață și deci, fluxul va fi drenat spre exterior în conformitate cu ecuația

$$u_t = -\beta(u - u_1).$$

În chimie, unde u semnifică *concentrația unei substanțe*, ecuația (6.13) afirmă că viteza de schimbare (variație) a substanței, adică u_t , se datorează atât difuziei $a^2 \nabla^2 u$, cât și faptului că substanța poate fi *creată* ($u < u_1$) sau *distrusă* ($u > u_1$) printr-o reacție chimică proporțional cu diferența dintre concentrațiile u și u_1 .

6.2.2 Ecuația difuzie–convecție a poluării apelor subterane

Poluarea apelor subterane este un fenomen complex, care depinde atât de natura mediului poros cât și de natura poluanților. În general, poluarea apelor subterane are un aspect fizic și unul chimic sau biochimic.

În continuare, definim noțiunea de *poluare* a apelor subterane în legătură cu dispersia unui poluant într-un mediu poros, și apoi descriem matematic legăturile dintre *concentrația poluantului* și celelalte mărimi caracteristice.

Când două fluide miscibile intră în contact, există o interfață care deschide o zonă de tranziție în care diferențele dintre proprietățile fizice ale celor două fluide tind, în timp, să se niveleze. Acest efect global rezultă din acțiunea simultană a unor fenomene fizico-chimice, cum ar fi *difuzia moleculară*, sau *diferențele de permeabilitate* ale mediului poros.

Fenomenul datorită căruia apare mișcarea și împrăștierea poluantului poartă numele de *dispersie*. Mecanismul dispersiei este foarte complicat. Dispersia este rezultatul acțiunii simultane a unui fenomen pur mecanic și a unui fenomen fizico-chimic.

¹Dirichlet, Gustav Lejeune (1805 – 1859), matematician german, autor al cercetărilor asupra seriilor trigonometrice, cel care a definit conceptul de funcție în sensul ei modern de corespondență.

²Neumann, John von (1903 - 1957), matematician american evreu de origine austro-ungară cu importante contribuții în fizica cuantică, analiza funcțională, teoria mulțimilor, topologie, economie, informatică, analiza numerică, hidrodinamica exploziilor, statistică și în multe alte domenii ale matematicii, fiind unul din cei mai importanți matematicieni din istorie. Von Neumann a fost un pionier al aplicațiilor teoriei operatorilor în mecanica cuantică, membru al Proiectului Manhattan și al Institutului pentru Studii Avansate de la Princeton (fiind unul din primii savanți aduși - un grup numit uneori "semizeii"), și co-creator al teoriei jocurilor și a conceptelor din automatele celulare și constructorul universal. Împreună cu Edward Teller și Stanislaw Ulam, von Neumann a rezolvat probleme cheie din teoria fizicii nucleare implicată în reacțiile termonucleare și bomba cu hidrogen.

Descrierea fizică a *fenomenului de dispersie* poate fi făcută prin suprapunerea unui *fenomen de difuzie moleculară* a substanței poluante cu un *fenomen de convecție (advecție)*, datorat existenței unui câmp de viteze în domeniul în care are loc poluarea.

Vom studia *dispersia unui poluant* în apa aflată într-un mediu poros, prin determinarea *concentrației substanței poluante* într-un punct din domeniul de curgere, la un moment dat. Această concentrație este influențată de natura mediului poros (prin *porozitate, conductivitate hidraulică, tortuozitate*), de *regimul de curgere* (prin *câmpul vitezelor*) și de *natura poluantului* (prin *coeficientul de difuzie moleculară*).

Prin tortuozitate (τ) se înțelege raportul dintre distanța între capetele traiectoriei parcurse de poluant (în linie dreaptă) și distanța reală, parcursă prin pori (mult mai mare decât cea reală).

În literatura de specialitate sunt prezentate trei categorii de modele matematice ale fenomenului de dispersie a unui poluant în apa aflată într-un mediu poros:

- *modele geometrice*;
- *modele geometrico-statistice*;
- *modele probabilistice*.

Modelele geometrice și cele geometrico-statistice au la bază reprezentarea mediului poros printr-o rețea geometrică, care să permită exprimarea matematică a fenomenului. Astfel de modele necesită un număr mare de parametri, caracteristici geometriei date. Reprezentarea mediului poros printr-o rețea geometrică constituie o idealizare a condițiilor reale. Pentru a face numărul cel mai mic de presupuneri cu privire la geometria locală a mediului poros s-a căutat un model general, o reprezentare generală a dispersiei. Aceasta a condus la realizarea unor modele probabilistice, bazate pe ideea că datele privitoare la mediul poros sunt aleatorii și că cea mai potrivită reprezentare a unei situații este aceea de a reprezenta mediul printr-un set de variabile aleatorii. De asemenea, există deduceri deterministe ale ecuației dispersiei. Acestea se bazează pe legea conservării masei și pe cele două legi ale lui Fick³.

În continuare, prezentăm descrierea matematică a dispersiei unui poluant într-un mediu poros saturat.

Ecuatia care descrie *fenomenul de transfer de masă*, într-un fluid care circulă printr-un mediu poros, în forma generală este:

$$u_t(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \left(\mathcal{D} \left(\rho(\mathbf{x}, t) \nabla \frac{u(\mathbf{x}, t)}{\rho(\mathbf{x}, t)} \right) \right) - \nabla \cdot \left(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}, t) \right) + S_r(\mathbf{x}, t) \quad (6.14)$$

sau

$$u_t(\mathbf{x}, t) = T_d + T_c + S_r, \quad (6.15)$$

în care: $u(\mathbf{x}, t)$ este *concentrația poluantului* într-un punct din domeniu, la un moment dat;

$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ este viteza apei în porii mediului saturat; $\rho(\mathbf{x}, t)$ este *densitatea amestecului*;

\mathcal{D} este o *transformare liniară* definită pe \mathbb{R}^3 , cu valori în \mathbb{R}^3 , care caracterizează dispersia poluantului în apa din mediul poros; $S_r(\mathbf{x}, t)$ reprezintă o *sursă de substanță poluantă* într-un punct sau într-o zonă din domeniu (sau *adsorbția poluantului* în matricea poroasă); T_d reprezintă *transportul difuzional* și se realizează prin mișcarea neîncetată a moleculelor care se ciocnesc și schimbă astfel, între ele, energie; T_c este *transportul convectiv (adectiv)* sau *flux adectiv* și corespunde deplasării particulelor antrenate de mișcarea generală a fluidului.

Când se dorește exprimarea matematică a fenomenului de dispersie, se face referire la ecuația (6.14) sau (6.15).

Din analiza fenomenului de dispersie a unui poluant într-un mediu poros rezultă existența a trei mecanisme principale, de migrație a substanțelor poluante:

- *convecția (advecția)*;
- *difuzia moleculară*;
- *dispersia mecanică sau cinematică*.

³Fick, Adolf (1829 – 1901), fiziolog german, care a formulat legile difuziei. A mai contribuit și la studiul contracției musculare

Pornind de la definirea fenomenului, se poate exprima matematic fiecare din cele trei mecanisme.

Prin convecție (advecție) vom înțelege antrenarea elementelor în soluție, în mișcarea fluidului care se deplasează.

Difuzia moleculară este un fenomen fizic legat de agitația moleculară. Într-un fluid în repaus, mișcarea browniană provoacă deplasarea particulelor în toate direcțiile spațiului. Dacă concentrația fluidului este omogenă în spațiu, două puncte vecine trimit, în medie, același număr de particule unul spre celălalt, iar agitația moleculară nu modifică concentrația soluției. Dacă există un gradient de concentrație între două puncte vecine, punctul cu concentrație mai ridicată va trimite, în medie, mai multe particule în toate direcțiile, decât punctele cu concentrație slabă. Rezultatul acestei agitații moleculare va fi un flux de particule dinspre zona cu concentrație mai ridicată spre cea cu concentrație mai scăzută.

Dispersia cinematică (mecanică) este un fenomen de amestec, legat de eterogenitatea vitezelor microscopice. Dispersia cinematică ar putea fi rezumată prin următoarele aspecte:

- (i) *propagare mai rapidă a elementelor transportate în axa porilor;*
- (ii) *diferență a vitezelor medii între pori diferiți;*
- (iii) *liniile de curent se întrepătrund, provocând o diluție neuniformă a concentrației.*

Transformarea \mathcal{D} din ecuația (6.14) se numește *coeficient de dispersie* și conține în ea atât efectul difuziei moleculare a poluantului în apă cât și pe cel al vitezei apei în porii materialului poros. Dacă se alege ca bază în \mathbb{R}^3 versorii direcțiilor principale de anizotropie ale corpului, atunci matricea transformării liniare \mathcal{D} în această bază are forma diagonală

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} D_L & 0 & 0 \\ 0 & D_T & 0 \\ 0 & 0 & D_T \end{pmatrix}.$$

În matricea de mai sus, D_L este numit *coeficient de dispersie longitudinală* (în sensul curgerii), iar D_T se numește *coeficient de dispersie transversală* în două direcții ortogonale la direcția de curgere.

Pentru a obține soluții cu semnificație fizică, ecuației (6.14) i se adaugă condiția inițială și condiții pe frontiera corpului, care de fapt sunt condiții de unicitate.

6.3 Proprietăți ale soluțiilor problemelor de propagare a căldurii

Vom considera unele probleme care se pun în legătură cu ecuația propagării căldurii într-o singură dimensiune spațială și vom studia unele proprietăți ale soluțiilor acestor probleme. Ne vom ocupa deci de cel mai simplu exemplu de ecuație cu derivate parțiale de tip parabolic și anume *ecuația parabolică liniară*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta(x, t) u, \quad (6.16)$$

unde $a > 0$ este *constantă de difuzivitate*, iar funcțiile $\alpha(x, t)$ și $\beta(x, t)$ sunt funcții continue. În cazul particular când $\alpha(x, t)$ și $\beta(x, t)$ sunt identic nule, ecuația (6.16) descrie propagarea unidimensională a căldurii fără surse interne de căldură (vezi ecuația (6.8), particularizată desigur la cazul unidimensional).

Fie \mathcal{D} un domeniu din planul xOt având frontiera $\partial\mathcal{D} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, unde Γ_1 este segmentul de dreaptă AB situat pe paralela $t = T > 0$ la axa orizontală Ox , iar $\Gamma_2 = AMB$ este un arc simplu de curbă situat în semiplanul $t < T$. Vom presupune că domeniul \mathcal{D} este situat în semiplanul $t \geq 0$, situație care poate fi întotdeauna realizată printr-o schimbare de variabile dacă este cazul.

De asemenea, vom presupune că soluția ecuației (6.16) este de clasă C^2 pe domeniul ei de definiție.

Teorema 6.3.1. (Principiul de extrem pentru o ecuație parabolică) Fie $u(x, t)$ soluția ecuației (6.16) pe $\mathcal{D} \cup \Gamma_1$, despre care presupunem că este continuă pe $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$ și fie $\beta(x, t) \leq 0$ pe \mathcal{D} . Dacă

$$\sup_{(x, t) \in \overline{\mathcal{D}}} u(x, t) > 0, \quad (6.17)$$

atunci acesta este atins pe porțiunea de frontieră Γ_2 .

Demonstrație. Fie $\forall \varepsilon > 0$ și $v(x, y) = u(x, y) - \varepsilon t$, $(x, t) \in \overline{\mathcal{D}}$. Deoarece $\sup_{(x,t) \in \overline{\mathcal{D}}} u(x, t) = \sup_{(x,t) \in \overline{\mathcal{D}}} v(x, t) + \varepsilon T$, conform ipotezei (6.17), putem alege $\varepsilon > 0$ astfel ca $\sup_{(x,t) \in \overline{\mathcal{D}}} v(x, t) > 0$. Dacă ar exista $(x_0, t_0) \in \mathcal{D} \cup \Gamma_1$ așa încât $v(x_0, t_0) = \sup_{(x,t) \in \overline{\mathcal{D}}} v(x, t)$, atunci există $\delta > 0$ pentru care segmentul

$$I = \{(x, t_0) : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\} \subset \mathcal{D} \cup \Gamma_1.$$

Acest interval este paralel cu axa orizontală Ox , are lungimea 2δ și centrul în punctul (x_0, t_0) .

Fiindcă $x_0 \in I$ este punct de maxim pentru funcția $v(x, t_0)$, $x \in I$, de două ori derivabilă pe I , avem

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, t_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_0, t_0) \leq 0.$$

Ținând seama că $u(x, y) = v(x, y) + \varepsilon t$ verifică (6.16), rezultă că funcția $v(x, t)$ satisface ecuația

$$a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) + \alpha(x, t) \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) + \beta(x, t) v(x, t) - \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \varepsilon(1 - t\beta(x, t)).$$

Luând aici $(x, t) = (x_0, t_0)$, având în vedere relațiile precedente și faptul că $\beta(x_0, t_0)v(x_0, t_0) \leq 0$, obținem că $\frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t_0) < -\varepsilon$. Continuitatea funcției $\frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t)$ asigură existența unui $\eta > 0$ astfel ca

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t) \leq -\frac{\varepsilon}{2}, \quad t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta].$$

Integrând această inegalitate pe segmentul $[t_0 - \eta, t_0]$, obținem

$$v(x_0, t_0) - v(x_0, t_0 - \eta) \leq -\frac{\varepsilon}{2}\eta.$$

Inegalitatea astfel obținută arată că punctul (x_0, t_0) nu poate aparține mulțimii $\mathcal{D} \cup \Gamma_1$, deci el aparține porțiunii de frontieră Γ_2 . Acum, ținând seama că pentru orice punct $(x, t) \in \mathcal{D}$ avem $t > 0$, obținem

$$\sup_{(x,t) \in \overline{\mathcal{D}}} u(x, t) \leq \varepsilon T + \sup_{(x,t) \in \Gamma_2} v(x, t) = \varepsilon T + \sup_{(x,t) \in \Gamma_2} [u(x, t) - \varepsilon t] \leq \varepsilon T + \sup_{(x,t) \in \Gamma_2} u(x, t).$$

Făcând $\varepsilon \rightarrow 0$ în inegalitatea $\sup_{(x,t) \in \overline{\mathcal{D}}} u(x, t) \leq \varepsilon T + \sup_{(x,t) \in \Gamma_2} u(x, t)$ rezultă

$$0 < \sup_{(x,t) \in \overline{\mathcal{D}}} u(x, t) = \sup_{(x,t) \in \Gamma_2} u(x, t),$$

adică valoarea pozitivă maximă, dacă există, este atinsă pe Γ_2 .

q.e.d.

Observația 6.3.1. Dacă u este soluție a ecuației (6.16), atunci și $-u$ este soluție a acestei ecuații. Repetând raționamentul de mai sus pentru funcția $-u$, obținem că dacă $\inf_{(x,t) \in \overline{\mathcal{D}}} u(x, t) < 0$, atunci acesta este atins pe Γ_2 .

Observația 6.3.2. Remarca precedentă, împreună cu concluzia Teoremei 6.3.1, arată că dacă $\beta(x, t) \leq 0$ pe \mathcal{D} , atunci orice soluție a ecuației (6.16) satisface condiția

$$\|u\| = \sup_{(x,t) \in \overline{\mathcal{D}}} |u(x, t)| \leq \sup_{(x,t) \in \Gamma_2} |u(x, t)|. \quad (6.18)$$

Teorema 6.3.2. Dacă $(x, t) \rightarrow \phi(x, t)$, $(x, t) \in \Gamma_2$ este o funcție continuă, atunci există cel mult o soluție a ecuației (6.16) care satisface condiția

$$u(x, t) = \phi(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma_2. \quad (6.19)$$

Demonstrație. Dacă $u_1(x, t)$ și $u_2(x, t)$ sunt două soluții ale problemei (6.16), (6.19), atunci funcția $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ este soluție a ecuației (6.16), care satisface condiția

$$v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_2.$$

Dacă $\beta(x, t) \leq 0$ pe \mathcal{D} , atunci aplicând Teorema 6.3.1, avem că $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t) = 0$ pe \mathcal{D} , ceea ce este echivalent cu $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ pe \mathcal{D} .

Dacă $\beta(x, t) > 0$ pe \mathcal{D} , atunci există $\beta_0 > 0$ așa încât $\beta_0 > \beta(x, t)$, pe $\overline{\mathcal{D}}$. În acest caz, funcția

$$w(x, t) = v(x, t) \exp(\beta_0 t)$$

verifică ecuația

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} + \tilde{\beta}(x, t) w, \quad (x, t) \in \mathcal{D}$$

și condiția $w(x, t) = 0$ pe Γ_2 . Deoarece $\tilde{\beta}(x, t) = \beta(x, t) - \beta_0 < 0$, pe \mathcal{D} , rezultă că $w(x, t) = 0$ pe \mathcal{D} și deci $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ pe \mathcal{D} . Cu aceasta am demonstrat unicitatea soluției problemei (6.16), (6.19). **q.e.d.**

Teorema 6.3.3. Dacă soluția problemei (6.16), (6.19) există, ea *depinde continuu* de valoarea ei pe Γ_2 .

Demonstrație. Deoarece mulțimea de puncte Γ_2 este compactă și $\phi(x, t)$ este continuă pe Γ_2 , avem evident

$$\|\phi\| = \sup_{(x, t) \in \Gamma_2} |\phi(x, t)| < \infty. \quad (6.20)$$

Fie $u_1(x, t)$ și $u_2(x, t)$ soluții ale ecuației (6.16) satisfăcând condițiile $u_1(x, t) = \phi_1(x, t)$, pentru $(x, t) \in \Gamma_2$, respectiv $u_2(x, t) = \phi_2(x, t)$, pentru $(x, t) \in \Gamma_2$, funcțiile date ϕ_1 și ϕ_2 fiind funcții continue pe Γ_2 .

Luând $\beta_0 \geq 0$ (β_0 se ia zero, dacă $\beta(x, t) \leq 0$, pe \mathcal{D}) ca la Teorema 6.3.3, notând $u_1(x, t) - u_2(x, t) = w(x, t) \exp(\beta_0 t)$ și aplicând inegalitatea (6.18), obținem

$$\sup_{(x, t) \in \overline{\mathcal{D}}} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| = \sup_{(x, t) \in \overline{\mathcal{D}}} |w(x, t) \exp(\beta_0 t)| \leq \exp(\beta_0 T) \sup_{(x, t) \in \Gamma_2} |\phi_1(x, t) - \phi_2(x, t)|.$$

Așadar, $\forall \varepsilon > 0$ avem

$$\sup_{(x, t) \in \overline{\mathcal{D}}} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon,$$

de îndată ce

$$\sup_{(x, t) \in \Gamma_2} |\phi_1(x, t) - \phi_2(x, t)| < \delta(\varepsilon, T) = \exp(-\beta_0 T) \varepsilon, \quad T > 0.$$

Aceasta înseamnă că la variații mici ale valorii soluției problemei (6.16), (6.19) pe Γ_2 , variații măsurate cu ajutorul normei (6.20), corespund variații mici ale soluției pe \mathcal{D} , variații care sunt măsurate cu ajutorul normei (6.18). Aceasta înseamnă că soluția problemei (6.16), (6.19) *depinde continuu* de datele pe porțiunea Γ_2 a frontierei lui \mathcal{D} . **q.e.d.**

6.4 Propagarea căldurii într-o bară de lungime finită cu condiții la limită și inițiale neomogene, în absența surselor interne de căldură

Vom aplica rezultatele obținute până acum la studiul a două probleme referitoare la ecuația propagării căldurii

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0 \quad (6.21)$$

într-o singură dimensiune spațială, în absența surselor interne de căldură. Ecuația (6.21) se obține din (6.16) dacă luăm $\alpha(x, t) = 0$ și $\beta(x, t) = 0$. Această ultimă condiție face ca rezultatele conținute în Teorema 6.3.1 și Teorema 6.3.2 să fie adevărate pentru ecuația (6.21).

Să considerăm problema determinării unei soluții a ecuației (6.21) pe domeniul

$$\Omega = \{(x, t) : x \in [0, \ell], t \in [0, +\infty)\},$$

care să satisfacă condiția inițială neomogenă

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in [0, \ell], \quad (6.22)$$

și condițiile la capete (pe frontiera barei)

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(\ell, t) = \mu_2(t), \quad t \in [0, +\infty), \quad (6.23)$$

unde ϕ , μ_1 și μ_2 sunt funcții continue pe domeniul lor de definiție verificând condițiile de compatibilitate

$$\phi(0) = \mu_1(0), \quad \phi(\ell) = \mu_2(0).$$

Din punct de vedere fizic problema revine la găsirea distribuției temperaturii într-o bară de lungime finită $\ell > 0$, cunoscând condiția termică a barei la momentul $t = 0$, descrisă de funcția $\phi : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ și temperaturile la care sunt menținute capetele O și A ale barei.

Observația 6.4.1. În baza Teoremei 6.3.2, dacă soluția problemei (6.21), (6.22), (6.23) există, atunci ea este unică pe orice dreptunghi $OABC$, unde O este originea reperului xOt și totodată una din extremitățile barei, $A(\ell, 0)$ este cealaltă extremitate, $B(\ell, t_0)$, cu $t_0 > 0$, $C(0, t_0)$. În plus, această soluție depinde continuu de datele pe laturile CO , OA și AB ale dreptunghiului (Γ_2 din Teorema 6.3.2 este $OA \cup AB \cup OC$). De aici rezultă că dacă soluția problemei (6.21), (6.22), (6.23) există pe **banda semi-infinită** Ω , atunci ea **este unică și depinde continuu de datele pe frontiera** acesteia. Frontiera mulțimii Ω este formată din semiaxa pozitivă Ot , din segmentul OA și semidreapta pozitivă $x = \ell$.

Vom construi soluția problemei (6.21), (6.22), (6.23) folosind metoda lui Fourier de separare a variabilelor.

Dacă în problema (6.21), (6.22), (6.23) trecem de la funcția necunoscută $u(x, t)$ la noua funcție necunoscută $v(x, t)$ prin relația

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t), \quad w(x, t) = \mu_1(t) + \frac{1}{a} \left(\mu_2(t) - \mu_1(t) \right) \cdot x, \quad (6.24)$$

atunci $v(x, t)$ este soluția problemei

$$(P) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial t}, \\ v(x, 0) = \phi(x) - w(x, 0), \\ v(0, t) = v(\ell, t) = 0. \end{cases}$$

Să observăm acum că dacă $v_1(x, t)$ și $v_2(x, t)$ sunt soluțiile problemelor (P_1) , respectiv (P_2) definite după cum urmează:

$$(P_1) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ v(x, 0) = \phi(x) - w(x, 0), \\ v(0, t) = v(\ell, t) = 0; \end{cases} \quad (P_2) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial t}, \\ v(x, 0) = 0, \\ v(0, t) = v(\ell, t) = 0, \end{cases}$$

atunci $v(x, t) = v_1(x, t) + v_2(x, t)$ este soluția problemei (P) . Prin urmare, soluția problemei (6.21), (6.22), (6.23) este

$$u(x, t) = v_1(x, t) + v_2(x, t) + w(x, t). \quad (6.25)$$

Din acest motiv, în cele ce urmează expunem metoda lui Fourier pentru determinarea soluțiilor problemelor care să conțină drept caz particular problemele (P_1) și (P_2) .

6.5 Propagarea temperaturii într-o bară izolată termic, cu condiție inițială nenulă și în absența surselor de căldură

sau infinită în ambele sensuri și care este redusă la un singur segment de dreaptă este neglijabilă, iar temperatura este constantă într-o secțiune

În ipoteza că între suprafața barei de lungime finită ℓ și mediul înconjurător nu există schimb de căldură (bara este *izolată termic* nici *surse de căldură în interior*, ceea ce înseamnă că $f(x, t) = 0$, iar μ_1 și μ_2 sunt funcții identic nule, funcția $u = u(x, t)$ care dă valoarea temperaturii la orice moment t , în orice punct x al barei, trebuie căutată ca soluție a ecuației

$$\frac{1}{a^2} u_t - u_{xx} = 0 \quad (6.26)$$

cu o condiție inițială și condiții date.

Presupunând că extremitățile $x = 0$ și $x = \ell$ ale barei sunt menținute la temperatura zero, condițiile la limită constau din relațiile:

$$u(0, t) = 0; \quad u(\ell, t) = 0, \quad \forall t > 0 \quad (6.27)$$

La momentul $t = 0$, când se începe studiul propagării temperaturii în bară, presupunem că se cunoaște forma barei, ceea ce se traduce prin *condiția inițială*

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad \forall x \in [0, \ell], \quad (6.28)$$

unde $\phi(x)$ este o funcție de clasă $C^1([0, \ell])$ care satisface *condițiile de compatibilitate* $\phi(0) = \phi(\ell) = 0$. Rezultă că funcția ϕ poate fi reprezentată ca o *serie Fourier de sinusuri* pe $[0, \ell]$, serie care este *absolut și uniform convergentă* pe $[0, \ell]$,

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad \forall x \in [0, \ell], \quad (6.29)$$

coeficienții dezvoltării fiind dați de relațiile

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \phi(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (6.30)$$

Aplicând *metoda separării variabilelor*, căutăm soluții particulare ale ecuației (6.26), sub forma

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t), \quad \forall (x, t) \in [0, \ell] \times [0, \infty). \quad (6.31)$$

Introducând u din (6.31) în ecuația cu derivate parțiale (6.26), obținem următoarele ecuații diferențiale ordinare:

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0; \quad (6.32)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \quad (6.33)$$

Pentru determinarea soluțiilor nebanale de forma (6.31), ale ecuației (6.26), care satisfac condiția la limită (6.27), trebuie aflate mai întâi soluțiile nebanale ale ecuației (6.33) cu condiția la limită

$$X(0) = 0, \quad X(\ell) = 0. \quad (6.34)$$

Pentru valorile lui λ egale cu $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, și numai pentru aceste valori, există soluții nebanale $X_n(x)$, ale problemei Cauchy (6.33), (6.34), egale cu

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (6.35)$$

Valorilor $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ le corespund următoarele soluții ale ecuației (6.32) :

$$T_n(t) = b_n \exp \left(- \left(\frac{n\pi a}{\ell} \right)^2 t \right), \quad t \in [0, \infty), \quad (6.36)$$

unde, pentru claritatea scrierii am utilizat simbolul $\exp y$ pentru valoarea în y a funcției exponențiale cu baza e , iar, după cum vom constata îndată, coeficienții b_n sunt, până la un factor, coeficienții precizați în (6.30).

Din cele stabilite mai sus, deducem că funcțiile

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} b_n \exp \left(- \left(\frac{n\pi a}{\ell} \right)^2 t \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad (x, t) \in [0, \ell] \times [0, \infty), \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (6.37)$$

satisfac ecuația (6.26) și condițiile la limită (6.27), indiferent de b_n .

Folosind *principiul superpoziției* [18], rezultă că funcția

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp \left(- \left(\frac{n\pi a}{\ell} \right)^2 t \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad (x, t) \in [0, \ell] \times [0, \infty) \quad (6.38)$$

satisfacă ecuația (6.26) și condițiile la limită (6.27), cu presupunerea că seria de funcții din membrul drept al egalității (6.38) trebuie să fie *absolut și uniform convergentă* pe domeniul indicat alăturat, condiție care este îndeplinită dacă avem în vedere ipotezele de lucru.

Impunând funcției $u(x, t)$ din (6.37) să satisfacă și *condiția inițială* (6.28), deducem că ar trebui să avem

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad (x, t) \in [0, \ell] \times [0, \infty). \quad (6.39)$$

Din unicitatea dezvoltării unei funcții periodice în serie Fourier numai de sinusuri și relațiile (6.29), (6.39), deducem

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad (x, t) \in [0, \ell] \times [0, \infty). \quad (6.40)$$

Seriile de funcții din (6.40) sunt egale dacă și numai dacă

$$b_n = \sqrt{\frac{\ell}{2}} a_n, \quad (6.41)$$

unde coeficienții a_n sunt precizați în (6.29).

Introducând b_n din (6.41) în (6.38), ajungem la concluzia în bara subțire omogenă, de lungime finită ℓ , se propagă după legea

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp \left(- \left(\frac{n\pi a}{\ell} \right)^2 t \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad (x, t) \in [0, \ell] \times [0, \infty), \quad (6.42)$$

unde coeficienții a_n sunt dați în (6.30).

Prezența factorului $\exp\left(-\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t$, unde $t \geq 0$, în seriile (6.38) și (6.42), precum și proprietățile seriei (6.29), (6.30) atrage faptul că seria (6.42) este infinit derivabilă termen cu termen, iar suma sa $u(x, t)$ este soluția problemei (6.26), (6.27), (6.28). Prin urmare, putem afirma că într-o bară subțire care nu face schimb de căldură cu exteriorul și fără surse termice în interiorul ei, căreia îi cunoaștem distribuția temperaturii la momentul inițial, temperatura se propagă după legea (6.42).

Observația 6.5.1. Trecerea, în raționamentele de mai sus, a funcției $\phi(x)$ în $\phi(x) - w(x, 0)$ conduce la soluția problemei (P_1) .

Dacă în (6.42) introducem valoarea lui a_n , dată de (6.30), obținem că soluția (6.42) se poate scrie în forma

$$u(x, t) = \int_0^\ell G(x, t; \xi) \phi(\xi) d\xi, \quad (x, t) \in [0, \ell] \times [0, \infty), \quad (6.43)$$

unde s-a efectuat notația

$$G(x, t; \xi) = \frac{2}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{ak\pi}{\ell}\right)^2 t \cdot \sin \frac{k\pi}{\ell} x \cdot \sin \frac{k\pi}{\ell} \xi, \quad (x, t; \xi) \in [0, \ell] \times [0, \infty) \times [0, \ell]. \quad (6.44)$$

Definiția 6.5.1. a Funcția $G(x, t; \xi)$ din (6.44) se numește **funcția lui Green pentru ecuația căldurii**.

Exercițiul 6.5.1. Să se găsească soluția $u(x, t)$ a ecuației propagării căldurii printr-o bară de lungime 4 unități

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

știind că bara este izolată termic, adică

$$u(0, t) = 0, \quad u(\ell, t) = 0, \quad t \in [0, \infty),$$

iar temperatura sa la momentul inițial $t = 0$ este dată de

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 2, \\ \frac{4-x}{2}, & \text{dacă } 2 < x \leq 4 \end{cases} = \varphi(x).$$

Soluție. Conform teoriei dezvoltată mai sus, soluția problemei este

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{4} t\right) \sin \frac{n\pi}{4} x,$$

unde

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^4 \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{4} \xi d\xi.$$

Introducând aici expresia funcției $\varphi(x)$, avem

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \left(\int_0^2 \frac{x}{2} \sin \frac{n\pi x}{4} dx + \int_2^4 \frac{4-x}{2} \sin \frac{n\pi x}{4} dx \right) = \\ &= \frac{8}{\pi n^2} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^k \frac{8}{\pi^2 (2k+1)^2}, & \text{dacă } n = 2k+1, \\ 0, & \text{dacă } n = 2k. \end{cases} \end{aligned}$$

Din aceste calcule rezultă că soluția problemei are în final expresia

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \exp\left(-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4} t\right) \sin \frac{(2k+1)\pi}{4} x.$$

■

6.6 Propagarea căldurii într-o bară finită, cu date la limită și inițiale nule, în prezența surselor interne de căldură

Să aplicăm metoda lui Fourier pentru găsirea soluției problemei

$$(Q) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & (x, t) \in [0, \ell] \times [0, +\infty), \\ u(x, 0) = 0, & x \in [0, \ell], \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0, & t \in [0, +\infty), \end{cases}$$

unde $f(x, t)$ este funcție de clasă C^1 pe banda semi-infinită $[0, \ell] \times [0, +\infty)$.

Această problemă modelează matematic propagarea temperaturii într-o bară subțire de lungime ℓ , temperatură datorată doar unei surse de căldură descrisă de funcția $f(x, t)$. Prin urmare, bara nu efectuează schimb de căldură cu exteriorul nici prin suprafața sa laterală și nici prin extremitățile sale, iar la momentul inițial, adică la momentul $t = 0$, temperatura este considerată a fi nulă.

Căutăm o soluție a problemei (Q) în forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad (x, t) \in [0, \ell] \times [0, \infty), \quad (6.45)$$

unde $T_n(t)$ sunt funcții ce urmează a fi determinate.

Dezvoltând funcția $f(x, t)$ în serie de sinusuri pe $[0, \ell]$, avem

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad (x, t) \in [0, \ell] \times [0, \infty), \quad (6.46)$$

unde coeficienții dezvoltării sunt dați de

$$\phi_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x, t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (6.47)$$

Punând condiția ca (6.45) să verifice ecuația neomogenă a propagării temperaturii (prima relație din (Q)), și ținând cont de (6.46), obținem egalitățile

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n'(t) + \left(\frac{n\pi a}{\ell} \right)^2 T_n(t) - \phi_n(t) \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x = 0, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

care au loc dacă $T_n(t)$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, este soluția ecuației diferențiale

$$T_n'(t) + \left(\frac{n\pi a}{\ell} \right)^2 T_n(t) = \phi_n(t). \quad (6.48)$$

Este evident că funcția $u(x, t)$ din (6.45) verifică condiția la limită a problemei (Q). Funcția $u(x, t)$ verifică și condiția inițială din (Q) dacă și numai dacă avem

$$T_n(0) = 0, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (6.49)$$

Din (6.48) și (6.49), obținem

$$T_n(t) = \int_0^\infty \phi_n(\tau) \exp\left(\left(-\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2(t-\tau)\right) d\tau, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (6.50)$$

În ipotezele impuse, funcția (6.45), cu $T_n(t)$, $n \in \mathbb{N}^*$, dați de (6.50) este soluția problemei (Q), iar soluția problemei (P₂) se obține pentru $f(x, t) = -\frac{\partial w}{\partial t}(x, t)$.

6.7 Propagarea căldurii într-o bară finită, cu condiții la limită și inițiale neomogene, în prezența unei surse interne de căldură

Presupunem că se dau funcțiile

$$\begin{aligned} f &: [0, \ell] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, & f &\in C^0([0, \ell] \times [0, \infty)), \\ \mu_1, \mu_2 &: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, & \mu_1, \mu_2 &\in C^0([0, \infty)), \\ \phi &: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}, & \phi &\in C^0([0, \ell]), \end{aligned}$$

și că se cere determinarea funcției $u : [0, \ell] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in C^0([0, \ell] \times [0, \infty))$, care să verifice ecuația unidimensională a propagării căldurii

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (6.51)$$

în bara de lungime ℓ , în prezența sursei interne de căldură $f(x, t)$, să satisfacă condițiile la limită

$$\begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(\ell, t) = \mu_2(t), \quad t \in [0, \infty) \end{cases} \quad (6.52)$$

și condiția inițială

$$\{ u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in [0, \ell]. \quad (6.53)$$

Teorema care urmează va reduce rezolvarea problemei (6.51), (6.52), (6.53) la o problemă asemănătoare, dar cu condiții la limită omogene. Pentru aceasta introducem funcția

$$f^*(x, t) = f(x, t) - \frac{1}{a^2} \left(\mu_1'(t) + \frac{x}{\ell} (\mu_2'(t) - \mu_1'(t)) \right), \quad (x, t) \in [0, \ell] \times [0, \infty), \quad (6.54)$$

care va fi o nouă *sursă internă de căldură*.

Introducem de asemenea, funcția

$$\phi^*(x) = \phi(x) - \left(\mu_1(0) + \frac{x}{\ell} (\mu_2(0) - \mu_1(0)) \right)$$

care va constitui o nouă *dată inițială*.

Teorema 6.7.1. *Dacă $u^*(x, t)$ este soluția problemei la limită cu date inițiale*

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f^*(x, t), \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad t \in [0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi^*(x), \quad x \in [0, \ell], \end{cases} \quad (6.55)$$

atunci funcția

$$u(x, t) = u^*(x, t) + \mu_2(t) + \frac{x}{\ell} (\mu_2(t) - \mu_1(t)), \quad (x, t) \in [0, \ell] \times [0, \infty), \quad (6.56)$$

este soluția problemei (6.51), (6.52), (6.53).

Demonstrație. Arătăm mai întâi că funcția (6.56) verifică ecuația (6.55)₁, pentru aceasta având nevoie de derivatele sale. Folosind (6.56), obținem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u^*}{\partial t} + \mu'_1(t) + \frac{x}{\ell}(\mu'_2(t) - \mu'_1(t)), \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{1}{\ell}(\mu_2(t) - \mu_1(t)), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}. \end{cases} \quad (6.57)$$

Înmulțind prima și a treia relație din (6.57) cu $1/a^2$, respectiv -1 , adunându-le și folosind faptul că $u^*(x, t)$ satisface ecuația (6.55)₁, precum și (6.54), obținem

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial u^*}{\partial t} - \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \left(\mu'_1(t) + \frac{x}{\ell}(\mu'_2(t) - \mu'_1(t)) \right) = \\ &= f^*(x, t) + \frac{1}{a^2} \left(\mu'_1(t) + \frac{x}{\ell}(\mu'_2(t) - \mu'_1(t)) \right) = f(x, t), \end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că funcția u din (6.56) este soluție a ecuației (6.51).

Din (6.56) obținem de asemenea

$$\begin{cases} u(0, t) = u^*(0, t) + \mu_1(t) + \frac{0}{\ell}(\mu_2(t) - \mu_1(t)) = \mu_1(t), \\ u(\ell, t) = u^*(\ell, t) + \mu_1(t) + \frac{\ell}{\ell}(\mu_2(t) - \mu_1(t)) = \mu_2(t), \\ u(x, 0) = u^*(x, 0) + \mu_1(0) + \frac{x}{\ell}(\mu_2(0) - \mu_1(0)) = \phi^*(x) + \mu_1(0) + \frac{x}{\ell}(\mu_2(0) - \mu_1(0)) = \phi(x), \end{cases}$$

ceea ce arată că funcția u din (6.56) satisface condițiile la limită (6.52) și condiția inițială (6.53).

q.e.d.

6.8 Principiul lui Duhamel pentru determinarea unei soluții particulare a ecuației neomogene a propagării temperaturii într-o bară de lungime finită

Teorema 6.8.1. (Principiul lui Duhamel) Dacă pentru fiecare $\tau \in [0, \infty)$ fixat notăm cu $w(x, t, \tau)$ soluția ecuației

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (6.58)$$

care verifică condițiile

$$\begin{cases} w(0, t, \tau) = 0, \\ w(\ell, t, \tau) = 0 \end{cases} \quad (6.59)$$

și

$$w(x, 0, \tau) = a^2 f(x, \tau), \quad (6.60)$$

atunci funcția

$$u_p(x, t) = \int_0^t w(x, t - \tau, \tau) d\tau \quad (6.61)$$

este soluția ecuației

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (6.62)$$

care satisface condițiile inițiale și la limită

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = 0, \\ u(\ell, t) = 0. \end{cases} \quad (6.63)$$

Demonstrație. Calculăm derivatele funcției (6.61) folosind teoria integralelor depinzând de parametri. Avem

$$\frac{\partial u_p}{\partial t} = w(x, 0, t) + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(x, t - \tau, \tau) d\tau$$

sau

$$\frac{\partial u_p}{\partial t} = a^2 f(x, t) + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(x, t - \tau, \tau) d\tau.$$

Apoi,

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t - \tau, \tau) d\tau.$$

Din aceste rezultate deducem

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \frac{\partial u_p}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2} &= \frac{1}{a^2} \left(a^2 f(x, t) + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(x, t - \tau, \tau) d\tau \right) - \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t - \tau, \tau) d\tau = \\ &= f(x, t) + \int_0^t \left(\frac{1}{a^2} \frac{\partial w}{\partial t}(x, t - \tau, \tau) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t - \tau, \tau) \right) d\tau = f(x, t), \end{aligned}$$

ceea ce arată că funcția (6.61) este soluția ecuației (6.62).

Din (6.61), (6.59) și (6.60), găsim

$$\begin{cases} u_p(x, 0) = \int_0^0 w(x, t - \tau, \tau) d\tau = 0, \\ u_p(0, t) = \int_0^t w(0, t - \tau, \tau) d\tau = 0, \\ u_p(\ell, t) = \int_0^t w(\ell, t - \tau, \tau) d\tau = 0, \end{cases}$$

adică sunt îndeplinite și condițiile (6.63).

q.e.d.

Observația 6.8.1. În baza Teoremei 6.7.1 și Teoremei 6.8.1 rezultă că rezolvarea problemei propagării căldurii într-o bară de lungime finită, cu condiții la limită și inițiale nenule, în prezența unei surse interne de căldură, denumită și **factor perturbator**, se reduce la determinarea soluției problemei

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & (x, t) \in [0, \ell] \times [0, \infty), \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in [0, \ell], \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0, & t \in [0, \infty), \end{cases}$$

adică a problemei (6.26), (6.27), (6.28), a cărei soluție a fost determinată într-un paragraf anterior.

6.9 Problema Cauchy pentru ecuația propagării căldurii într-o dimensiune spațială

În cele ce urmează vom considera propagarea temperaturii într-o *bară infinită în ambele sensuri*, ceea ce înseamnă că vom urmări *modul de răcire a unei bare* foarte lungi, cunoscând la momentul inițial *distribuția temperaturii* în fiecare punct al ei.

Prin urmare, avem de studiat problema determinării soluției ecuației cu derivate parțiale de tip parabolic

$$\frac{1}{a^2}u_t - u_{xx} = 0, \quad (x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, +\infty), \quad (6.64)$$

cu condiția inițială

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (6.65)$$

Această problemă cu o condiție inițială este cunoscută ca *problema Cauchy pentru ecuația propagării căldurii* într-o dimensiune spațială.

Din punct de vedere fizic, problema (6.64), (6.65) revine la determinarea distribuției temperaturii unei bare infinite în ambele sensuri când se cunoaște distribuția inițială a temperaturii.

Pentru început, vom presupune că funcția $\varphi(x)$ este continuă și mărginită pe întreaga axă reală.

Teorema 6.9.1. *Există cel mult o soluție a problemei (6.64), (6.65) care este mărginită în semiplanul $t \geq 0$.*

Demonstrație. Presupunem că ar exista soluțiile $u_1(x, t)$ și $u_2(x, t)$ ale problemei (6.64), (6.65) care sunt mărginite în semiplanul $t \geq 0$, adică

$$|u_1(x, t)| \leq M, \quad |u_2(x, t)| \leq M, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty).$$

Funcția $w(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ este o soluție a problemei (6.64), (6.65) satisfăcând condițiile

$$w(x, 0) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |w(x, t)| \leq 2M, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty).$$

Fie $L > 0$ și $T > 0$ arbitrari. Se verifică imediat că funcția

$$v(x, t) = \frac{4M}{L} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right)$$

este o soluție a ecuației (6.64) și verifică condițiile

$$v(x, 0) \geq 0 = |w(x, 0)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |v(\pm L, t)| \geq 2M \geq |w(\pm L, t)|, \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Funcțiile $v(x, t) - w(x, t)$ și $v(x, t) + w(x, t)$ sunt soluții ale ecuației (6.64) pe dreptunghiul

$$\mathcal{D} = \{(x, t) : |x| < L, \quad 0 < t < T\}$$

ale cărui vârfuri sunt $A(-L, T)$, $B(-L, 0)$, $C(L, 0)$ și $D(L, T)$, iar pe porțiunea de frontieră $\Gamma_2 = AB \cup BC \cup CD$ sunt nenegative și deci avem:

$$\inf_{\Gamma_2} (v(x, t) - w(x, t)) \geq 0; \quad \inf_{\Gamma_2} (v(x, t) + w(x, t)) \geq 0. \quad (6.66)$$

În baza *principiului de maxim* rezultă că avem

$$\inf_{\mathcal{D}} (v(x, t) - w(x, t)) \geq 0; \quad \inf_{\mathcal{D}} (v(x, t) + w(x, t)) \geq 0, \quad (6.67)$$

căci în caz contrar am avea $\inf_{\Gamma_2}(v(x, t) - w(x, t)) < 0$; $\inf_{\Gamma_2}(v(x, t) + w(x, t)) < 0$, ceea ce contrazice inegalitățile (6.66). Din inegalitățile (6.67) rezultă $|w(x, t)| \leq v(x, t) = \frac{4M}{L} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right)$, $\forall (x, t) \in \overline{\mathcal{D}}$, unde $\overline{\mathcal{D}}$ este închiderea domeniului \mathcal{D} .

Fie acum (x_0, t_0) un punct din semiplanul $t \geq 0$, ales arbitrar. Pentru orice $\varepsilon > 0$ putem alege L suficient de mare astfel încât să avem $|w(x_0, t_0)| < \varepsilon$ și deci $w(x_0, t_0) = 0$. Cum (x_0, t_0) a fost ales arbitrar, rezultă că avem

$$w(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t) = 0, \quad \forall x \in (-\infty, +\infty) \quad \text{și} \quad \forall t \geq 0$$

și astfel teorema este demonstrată.

q.e.d.

Observația 6.9.1. Din Teorema 6.9.1 rezultă că dacă prin anumite mijloace putem găsi o soluție a problemei (6.64), (6.65), atunci aceasta este unica soluție a acestei probleme.

Încercăm să determinăm soluția ecuației (6.64) folosind metoda separării variabilelor. În acest scop, punem

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, +\infty). \quad (6.68)$$

Înlocuind (6.68) în (6.64), obținem

$$\frac{1}{a^2} X(x)T'(t) - X''(x)T(t) = 0$$

sau

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = K,$$

unde K trebuie să fie o constantă deoarece x și t sunt variabile independente. Avem de integrat ecuațiile diferențiale ordinare:

$$X''(x) - K X(x) = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty); \quad (6.69)$$

$$T'(t) - K a^2 T(t) = 0, \quad t \in [0, +\infty). \quad (6.70)$$

Integrând ecuația (6.70), se obține

$$T(t) = c \cdot \exp(K a^2 t),$$

unde c este o constantă.

După această etapă, rezultă că soluția ecuației (6.64) este

$$u(x, t) = c X(x) \exp(K a^2 t).$$

De aici rezultă că nu putem avea decât cazul $K < 0$, deoarece pentru $K > 0$ ar rezulta că pentru $c \neq 0$ în fiecare punct al barei temperatura ar crește în valoare absolută peste orice limite, iar pentru $K = 0$, această temperatură ar păstra în fiecare punct o valoare ce ar depinde numai de acel punct și independentă de timp, adică am avea

$$u(x, t) = c X(x).$$

Nu putem accepta nici anularea constantei c , deoarece atunci am avea temperatura nulă în toată bara în orice moment, ceea ce contrazice condiția inițială (6.65).

Ținând seama de cele de mai sus, introducem o nouă constantă $\lambda > 0$, legată de constanta K prin relația $K = -\lambda^2$, ceea ce conduce la faptul că ecuația diferențială verificată de $X(x)$ devine

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (6.71)$$

Ecuația diferențială (6.71) are soluția

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x. \quad (6.72)$$

Pentru constantele de integrare din (6.72) putem afirma că depind de λ , iar dacă notăm $cA = A(\lambda)$ și $cB = B(\lambda)$, o soluție a ecuației (6.64) este

$$u(x, t; \lambda) = \left(A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x \right) \exp(-\lambda^2 a^2 t), \quad (6.73)$$

ceea ce înseamnă că la fiecare $\lambda > 0$ avem câte o *undă de temperatură*.

Aplicând *principiul superpoziției* și ținând cont că λ acoperă întreaga semidreaptă pozitivă deschisă $\mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$, constatăm că *soluția generală* a ecuației (6.64) este

$$u(x, t) = \int_0^\infty u(x, t; \lambda) d\lambda \quad (6.74)$$

sau

$$u(x, t) = \int_0^\infty \left(A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x \right) \exp(-\lambda^2 a^2 t) d\lambda, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty).$$

Condiția inițială (6.65) implică verificarea identității

$$\int_0^\infty \left(A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x \right) d\lambda = \varphi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (6.75)$$

din care vom vedea că se pot deduce funcțiile $A(\lambda)$ și $B(\lambda)$.

Într-adevăr, aceasta se va întâmpla dacă funcția $\varphi(x)$ este astfel încât admite o *reprezentare integrală Fourier în cosinus*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) \cos \lambda(x - \alpha) d\alpha \right) d\lambda. \quad (6.76)$$

Folosind (6.75) și (6.76), deducem

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left(A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x \right) d\lambda = \\ &= \int_0^\infty \left(\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) \cos \lambda \alpha d\alpha \right) \cos \lambda x \right) d\lambda + \int_0^\infty \left(\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) \sin \lambda \alpha d\alpha \right) \sin \lambda x \right) d\lambda, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (6.77)$$

Deoarece funcțiile $\cos \lambda x$ și $\sin \lambda x$ sunt *independente funcțional*, din (6.77) rezultă

$$\begin{cases} A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) \cos \lambda \alpha d\alpha, \\ B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) \sin \lambda \alpha d\alpha. \end{cases} \quad (6.78)$$

Înlocuind în (6.73) expresiile (6.78) ale funcțiilor $A(\lambda)$ și $B(\lambda)$, obținem pentru soluția $u(x, t; \lambda)$ următoarea expresie

$$u(x, t; \lambda) = \frac{1}{\pi} \left(\cos \lambda x \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) \cos \lambda \alpha d\alpha + \sin \lambda x \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) \sin \lambda \alpha d\alpha \right) \exp(-\lambda^2 a^2 t),$$

care poate fi restrânsă la

$$u(x, t; \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) \exp(-\lambda^2 a^2 t) \cos \lambda(x - \alpha) d\alpha. \quad (6.79)$$

Dacă introducem expresia funcției $u(x, t; \lambda)$ din (6.79) în (6.74), putem afirma că soluția problemei Cauchy pentru ecuația căldurii este dată de expresia

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^\infty \exp(-\lambda^2 a^2 t) \cos \lambda(x - \alpha) d\lambda \right) \varphi(\alpha) d\alpha, \quad (6.80)$$

care se poate transforma, dacă în integrala interioară, care este o *integrală de tip Poisson*⁴ se face substituția

$$\lambda a\sqrt{t} = u, \quad \frac{\alpha - x}{a\sqrt{t}} = v,$$

din care rezultă

$$\lambda = \frac{u}{a\sqrt{t}}, \quad d\lambda = \frac{du}{a\sqrt{t}}, \quad \lambda(\alpha - x) = uv.$$

Așadar, integrala interioară din (6.80) are acum expresia

$$\frac{1}{a\sqrt{t}} \int_0^\infty \exp(-u^2) \cos uv \, du = \frac{1}{a\sqrt{t}} I(v),$$

unde am notat cu $I(v)$ integrala improprie depinzând de parametrul v

$$I(v) = \int_0^\infty \exp(-u^2) \cos uv \, du.$$

Funcția $I(v)$ este derivabilă și

$$I'(v) = - \int_0^\infty u \exp(-u^2) \sin uv \, du.$$

Integrând prin părți, obținem

$$I'(v) = \frac{1}{2} \exp(-u^2) \sin uv \Big|_0^\infty - \frac{v}{2} \int_0^\infty \exp(-u^2) \cos uv \, du,$$

din care deducem că funcția $I(v)$ este soluția ecuației diferențiale

$$I'(v) + \frac{v}{2} I(v) = 0.$$

Astfel, pentru determinarea funcției $I(v)$ trebuie să integrăm o ecuație diferențială de ordinul întâi cu variabile separabile. Separând variabilele și integrând, găsim

$$I(v) = I(0) \exp\left(-\frac{v^2}{4}\right).$$

Însă $I(0) = \int_0^\infty \exp(-u^2) du$ este *integrala Gauss-Poisson* a cărei valoare este $I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, astfel că

$$I(v) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(-\frac{v^2}{4}\right).$$

Revenind la notațiile pentru I și v , se găsește

$$a\sqrt{t} \int_0^\infty \exp(-a^2\lambda^2 t) \cos \lambda(x - \alpha) d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(-\frac{(x - \alpha)^2}{4a^2 t}\right). \quad (6.81)$$

Înlocuind (6.81) în (6.80), avem

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) \exp\left(-\frac{(x - \alpha)^2}{4a^2 t}\right) d\alpha, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty). \quad (6.82)$$

Integrala (6.82) se numește *integrala Poisson*.

Relația (6.82) descrie, în condiția inițială dată de $\varphi(x)$, *regimul termic de răcire al barei*, imediat după aplicarea *încălzirii* la momentul $t = 0$ cuantificată de funcția $\varphi(x)$.

Nu este clar însă ce se întâmplă la momentul inițial $t = 0$. Este oare îndeplinită condiția inițială (6.65)?

⁴Poisson, Siméon Denis (1781 – 1840), matematician francez, unul din creatorii fizicii matematice și autor al multor lucrări despre mecanica cerească, teoria elasticității și calculul probabilităților.

Vom încerca să răspundem la întrebare amintind că am presupus că funcția φ este mărginită pe \mathbb{R} , adică există $M > 0$ așa încât să avem $|\varphi(x)| \leq M$, $x \in \mathbb{R}$. Vom arăta că funcția (6.82) este de asemenea mărginită, adică satisface condiția

$$|u(x, t)| \leq M, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty). \quad (6.83)$$

Făcând schimbarea de variabilă $\alpha = x + 2au\sqrt{t}$ în integrala (6.82), obținem

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + 2au\sqrt{t}) \exp(-u^2) du, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty). \quad (6.84)$$

Integrala improprie depinzând de parametrii x și t din (6.84) este absolut și uniform convergentă în raport cu $t \geq 0$ și avem

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x + 2au\sqrt{t})| \exp(-u^2) du \leq M \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) du = M \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = M.$$

Așadar, are loc (6.83), deci funcția $u(x, t)$ din (6.82) este mărginită.

Vom arăta acum că funcția (6.82) este continuă pe banda semi-infinită $\Omega = [0, \ell] \times [0, \infty)$ și satisface condiția

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \varphi(x), \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (6.85)$$

adică funcția $u(x, t)$ verifică condiția inițială (6.65).

Ținând cont de integrala Gauss–Poisson, rezultă că putem scrie

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \exp(-u^2) du. \quad (6.86)$$

Din (6.82) și (6.86), obținem

$$|u(x, t) - \varphi(x)| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x + 2au\sqrt{t}) - \varphi(x)) \exp(-u^2) du \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x + 2au\sqrt{t}) - \varphi(x)| \exp(-u^2) du.$$

Integrala improprie $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) du$ este convergentă și are valoarea $\sqrt{\pi}$ deoarece este de două ori integrala Gauss–Poisson. Prin urmare, oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $k = k(\varepsilon) > 0$ astfel încât să avem

$$\frac{2M}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-k} \exp(-u^2) du + \int_k^{+\infty} \exp(-u^2) du \right) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.87)$$

Ținând seama de inegalitatea (6.87) și de faptul că $|\varphi(x + 2au\sqrt{t}) - \varphi(x)| \leq 2M$, obținem

$$|u(x, t) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-k}^{+k} |\varphi(x + 2au\sqrt{t}) - \varphi(x)| \exp(-u^2) du.$$

Funcția φ fiind continuă rezultă că, pentru $\varepsilon > 0$ considerat mai sus, există $\delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât să avem $|\varphi(x + 2au\sqrt{t}) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, pentru orice $t \in [0, \delta]$, pentru orice $u \in [-k, +k]$ și orice $x \in \mathbb{R}$. Deci, avem

$$|u(x, t) - \varphi(x)| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-k}^{+k} \exp(-u^2) du < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) du = \varepsilon, \quad \forall t \in [0, \delta],$$

adică are loc (6.85).

În baza Teoremei 6.3.3 rezultă că funcția (6.82) este unica soluție mărginită a problemei (6.64), (6.65).

Observația 6.9.2. Procedând analog ca în demonstrația egalității (6.85), se poate arăta că soluția problemei (6.64), (6.65) *depinde continuu de datele inițiale*.

Observația 6.9.3. Din (6.82) se vede că temperatura inițială $\varphi(x)$ se **propagă instantaneu**, ceea ce înseamnă că oricare ar fi temperatura inițială la momentul $t = 0$, aceasta dă naștere unei temperaturi nenule în orice punct $x \in \mathbb{R}$ și la orice moment $t > 0$. Această situație pare a fi imposibilă din punct de vedere fizic și arată limitele modelului care ne-a condus la ecuația liniară (6.64) de propagare a căldurii. Acest neajuns se poate înlătura, spre exemplu, dacă ipoteza lui Fourier (6.1), privind conducția căldurii, se înlocuiește cu o altă **lege de propagare**.

6.10 Problema Cauchy a ecuației propagării căldurii în n dimensiuni spațiale. Soluție fundamentală

Să considerăm ecuația cu derivate parțiale de ordinul al doilea în funcția necunoscută

$$(\mathbf{x}, t) = (x_1, x_2, \dots, x_n, t) \rightarrow u = u(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \quad a > 0. \quad (6.88)$$

Ecuația (6.88) este de tip parabolic și mai poate fi scrisă în forma

$$u_t = a^2 \nabla^2 u, \quad a > 0, \quad (6.89)$$

unde am notat

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \quad (6.90)$$

care este *laplacianul funcției* u în n dimensiuni.

În cazurile $n = 3$, $n = 2$ și $n = 1$, ecuația corespunzătoare (6.89) descrie propagarea căldurii în trei, două și respectiv o singură dimensiune, într-un mediu omogen și în absența surselor interne de căldură.

Considerațiile și rezultatele obținute în cazul $n = 1$, în paragraful anterior, se pot adapta pentru cazurile $n > 1$. Vom da în continuare generalizări la cazurile $n = 2$ și $n = 3$, fără a le susține cu argumente matematice riguroase.

Ecuația caracteristică atașată ecuației (6.88) este

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_n}\right)^2 = 0$$

și deci curbele caracteristice ale ecuației (6.88) sunt hiperplanele $(n + 1)$ -dimensionale $t = \lambda$, unde λ este o constantă reală arbitrară.

Fie funcția reală de $2n + 2$ variabile reale $(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) = (x_1, x_2, \dots, x_n, t; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \tau)$, definită prin relația

$$E(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) = \frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n} \cdot \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|^2}{4a^2(t-\tau)}\right), \quad t > \tau, \quad (6.91)$$

unde $\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - \xi_k)^2}$ este norma euclidiană în \mathbb{R}^n , iar \exp este simbolul funcției exponențiale cu baza numărul e .

Efectuând derivatele funcției (6.91), găsim

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial t} &= \left(-\frac{n}{2(t-\tau)} + \frac{\|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}\|^2}{4a^2(t-\tau)^2} \right) E(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau), \\ \nabla^2 E &= \frac{1}{a^2} \left(-\frac{n}{2(t-\tau)} + \frac{\|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}\|^2}{4a^2(t-\tau)^2} \right) E(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau), \end{cases}$$

de unde rezultă că funcția (6.91) verifică ecuația (6.89) oricare ar fi $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ și $t > \tau$.

Funcția (6.91) se numește *soluție fundamentală* a ecuației căldurii în n dimensiuni spațiale.

Pentru $n = 1$ și $\tau = 0$, din (6.91) se obține

$$E(x, t; \xi, 0) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right), \quad t > 0 \quad (6.92)$$

și formula (6.82) se scrie sub forma

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) E(x, t; \xi, 0) d\xi, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty). \quad (6.93)$$

Dacă $g(x, t)$ este o funcție mărginită, continuă și *absolut integrabilă* pentru $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$, atunci funcția

$$v(x, t; \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi, \tau) E(x, t; \xi, \tau) d\xi, \quad t > \tau, \quad (6.94)$$

satisface condițiile

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad t > \tau; \quad v(x, \tau; \tau) = g(x, \tau) \quad (6.95)$$

și deci funcția

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t; \tau) d\tau, \quad t > \tau \quad (6.96)$$

este soluția problemei

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t), \\ u(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (6.97)$$

În cazul $n = 2$, soluția fundamentală a ecuației căldurii este

$$E(x, y, t; \xi, \eta, \tau) = \frac{1}{4a^2\pi(t-\tau)} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right), \quad t > \tau. \quad (6.98)$$

Soluția problemei Cauchy

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ u(x, y, 0) = \Phi(x, y) \end{cases} \quad (6.99)$$

este

$$u(x, y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi, \eta) \cdot E(x, y, t; \xi, \eta, 0) d\xi d\eta, \quad (6.100)$$

$\Phi(x, y)$ fiind presupusă mărginită, continuă și absolut integrabilă pe \mathbb{R}^2 .

Soluția fundamentală a ecuației propagării căldurii în cazul $n = 3$ este

$$E(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta, \tau) = \frac{1}{8a^3\sqrt{\pi^3(t-\tau)^3}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right), \quad t > \tau. \quad (6.101)$$

Dacă $\Phi(x, y, z)$ este o funcție mărginită, continuă și absolut integrabilă pe \mathbb{R}^3 , atunci soluția problemei Cauchy

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ u(x, y, z, 0) = \Phi(x, y, z) \end{cases} \quad (6.102)$$

este dată de formula

$$u(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi, \eta, \zeta) \cdot E(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta, 0) d\xi d\eta d\zeta. \quad (6.103)$$

Exercițiul 6.10.1. Să se integreze ecuația

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

știind că

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \varphi(x) = \begin{cases} c, & \text{dacă } x \in (\alpha, \beta) \\ 0, & \text{dacă } x \notin (\alpha, \beta), \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= 0. \end{aligned}$$

Soluție. Fiind o bară de lungime infinită, soluția problemei este dată de

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) d\xi, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty).$$

Cunoscând funcția $\varphi(x)$, dar și faptul că $a = 2$, deducem că soluția problemei devine

$$u(x, t) = \frac{c}{4\sqrt{\pi t}} \int_{\alpha}^{\beta} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{16t}\right) d\xi, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty).$$

Dacă se face substituția $u = \frac{\xi - x}{4\sqrt{t}}$, se obține

$$u(x, t) = \frac{c}{\sqrt{\pi t}} \int_{\frac{\alpha-x}{4t}}^{\frac{\beta-x}{4t}} \exp(-u^2) du, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty).$$

Introducând notația

$$\Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp(-z^2) dz,$$

constatăm că soluția problemei considerate este

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \left(\Phi\left(\frac{\beta-x}{4\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-x}{4\sqrt{t}}\right) \right).$$

■

6.11 Propagarea căldurii într-o bară omogenă de lungime finită, a cărei suprafață laterală este izolată termic și ale cărei extremități schimbă căldură cu exteriorul prin convecție

Presupunem că schimbul de căldură prin convecție se realizează cu medii ambiante aflate la temperaturile constante u_1 și u_2 , în respectiv cele două capete ale barei. În aceste condiții, studiul propagării căldurii în bara omogenă de lungime ℓ , a cărei suprafață laterală este izolată termic, se reduce la rezolvarea ecuației (6.26) cu condiția inițială (6.28) și cu condițiile la limită

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - h_1(u(0, t) - u_1) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) + h_2(u(\ell, t) - u_2) = 0, \quad t \in [0, \infty), \end{cases} \quad (6.104)$$

unde h_1 și h_2 sunt constante pozitive care arată că extremitățile barei nu sunt termoizolate. În cazul în care $h_1 = h_2 = 0$, relațiile (6.104) devin

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0, \quad t \in [0, \infty) \end{cases}$$

și arată că bara nu face schimb de căldură cu exteriorul ei.

Căutăm soluția problemei la limită cu condiții inițiale (6.26), (6.28), (6.104) în forma

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t), \quad (6.105)$$

unde $v(x)$ este soluția ecuației (6.26), adică a ecuației $v''(x) = 0$, care satisface condițiile la limită (6.104). Ecuația $v''(x) = 0$ admite soluția generală

$$v(x) = c_1 x + c_2. \quad (6.106)$$

Impunând funcției (6.106) să satisfacă condițiile la limită (6.104), obținem

$$\begin{cases} c_1 = \frac{h_1(u_2 - u_1)}{h_1 + h_2 + \ell h_1 h_2}, \\ c_2 = u_1 + \frac{c_1}{h_1} = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{h_1 + h_2 + \ell h_1 h_2}. \end{cases} \quad (6.107)$$

Pentru ca funcția $u(x, t)$ din (6.105) să fie soluția problemei la limită cu condiția inițială precizată mai sus, funcția $w(x, t)$ trebuie să satisfacă ecuația (6.26), condiția inițială

$$w(x, 0) = u(x, 0) - v(x) = \phi(x) - v(x) = \tilde{\phi}(x), \quad (6.108)$$

unde $v(x)$ se determină din formulele (6.106), (6.107) și următoarele condiții la limită omogene

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) - h_1 w(0, t) = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial x}(\ell, t) + h_2 w(\ell, t) = 0. \end{cases} \quad (6.109)$$

Rezolvarea problemei la limită cu condițiile (6.26), (6.108), (6.109) o vom face utilizând de asemeni metoda separării variabilelor.

În cele din urmă se găsește

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{\mu_n}{\ell} \cos \frac{\mu_n}{\ell} x + h_1 \sin \frac{\mu_n}{\ell} x \right) \exp \left(- \frac{a^2 \mu_n^2}{\ell^2} t \right), \quad (6.110)$$

unde μ_n , $n \in \mathbb{N}^*$, sunt rădăcinile pozitive ale ecuației

$$\cot \mu = \frac{\mu^2 - \ell^2 h_1 h_2}{\ell \mu (h_1 + h_2)}, \quad (6.111)$$

iar coeficienții A_n , obținuți din condiția inițială (6.108), folosind ortogonalitatea funcțiilor

$$X_n(x) = \frac{\mu_n}{\ell} \cos \frac{\mu_n}{\ell} x + h_1 \sin \frac{\mu_n}{\ell} x$$

pe compactul $[0, \ell]$, au expresiile

$$A_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^\ell \tilde{u}_0(x) \left(\frac{\mu_n}{\ell} \cos \frac{\mu_n}{\ell} x + h_1 \sin \frac{\mu_n}{\ell} x \right) dx, \quad (6.112)$$

prin pătratul normei funcției $X_n(x)$ înțelegând numărul

$$\|X_n\|^2 = \int_0^\ell \left(\frac{\mu_n}{\ell} \cos \frac{\mu_n}{\ell} x + h_1 \sin \frac{\mu_n}{\ell} x \right)^2 dx.$$

Din cele deduse mai sus rezultă că distribuția temperaturii într-o bară omogenă de lungime ℓ , a cărei suprafață laterală este izolată termic și ale cărei extremități schimbă căldură cu exteriorul prin convecție este dată de legea

$$u(x, t) = \frac{h_1(u_2 - u_1)}{h_1 + h_2 + \ell h_1 h_2} x + u_1 + \frac{u_2 - u_1}{h_1 + h_2 + \ell h_1 h_2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{\mu_n}{\ell} \cos \frac{\mu_n}{\ell} x + h_1 \sin \frac{\mu_n}{\ell} x \right) \exp \left(- \frac{a^2 \mu_n^2}{\ell^2} t \right),$$

unde μ_n , $n \in \mathbb{N}^*$, sunt rădăcinile pozitive ale ecuației (6.64), iar coeficienții A_n au valorile date în (6.65).

Capitolul 7

Ecuatii de tip eliptic

7.1 Ecuatia lui Laplace și ecuația lui Poisson. Soluție fundamentală

Din (6.90), unde s-a introdus laplacianul în n dimensiuni, desprindem că operatorul diferențial de ordinul al doilea care acționează asupra funcției $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ are expresia

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}. \quad (7.1)$$

Operatorul (7.1) este cunoscut sub numele de *operatorul lui Laplace în n dimensiuni*.

Operatorul lui Laplace în n dimensiuni poate fi scris de asemenea ca produsul scalar al operatorului diferențial vectorial

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad (7.2)$$

cu el însuși.

Operatorul ∇ din (7.2) este cunoscut sub numele de *operatorul lui Hamilton în n dimensiuni*, iar \mathbf{e}_k , unde $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, sunt versorii reperului cartezian ortogonal $Ox_1x_2\dots x_n$. Așadar,

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla.$$

Definiția 7.1.1. Ecuatia cu derivate parțiale de ordinul al doilea

$$\nabla^2 u = 0 \quad (7.3)$$

se numește *ecuația lui Laplace în n dimensiuni*.

Definiția 7.1.2. Ecuatia cu derivate parțiale de ordinul al doilea neomogenă

$$\nabla^2 u = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (7.4)$$

unde $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe D , se numește *ecuația lui Poisson în n dimensiuni*.

Definiția 7.1.3. O funcție reală $u(\mathbf{x})$ definită pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}^n$, unde este considerată una din ecuațiile (7.3), sau (7.4), care este continuă împreună cu derivatele sale parțiale până la ordinul al doilea și transformă în identitate acea ecuație cu derivate parțiale se numește **soluție regulată** a respectivei ecuații.

Definiția 7.1.4. O soluție regulată în $D \subset \mathbb{R}^n$ a ecuației lui Laplace (7.3) se numește funcție armonică.

Se verifică imediat că funcția

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{2-n}, & \text{dacă } n > 2 \\ -\ln \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, & \text{dacă } n = 2 \end{cases}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad (7.5)$$

unde

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2},$$

este soluție a ecuației lui Laplace în n dimensiuni (7.3) pe mulțimea $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{y}\}$.

Definiția 7.1.5. Funcția E din (7.5) se numește **soluție fundamentală** sau **soluție elementară** a ecuației lui Laplace în n dimensiuni.

Observația 7.1.1. Pentru a semnaliza existența și a vectorului \mathbf{y} în expresia (7.5), se obișnuiește ca soluția fundamentală (7.5) să se noteze prin $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Din Definiția 7.1.5 rezultă că soluția fundamentală a ecuației lui Laplace este o funcție armonică în orice punct din $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{y}\}$, iar în punctul ξ admite o *singularitate de tip pol* pentru $n > 2$ și *logaritmică* pentru $n = 2$.

Spațiul fizic îl vom nota cu \mathbb{R}^3 și îl vom presupune raportat la sistemul cartezian ortonormat $Oxyz$. Mulțimea de versori ortonormați $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ este baza reperului ortonormat $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, \mathbf{i} fiind versorul axei Ox , \mathbf{j} versorul axei Oy , iar \mathbf{k} este versorul axei Oz . Planul $z = 0$ va fi asimilat cu \mathbb{R}^2 .

În cazul $n = 3$, soluția fundamentală a ecuației lui Laplace este

$$E((x, y, z), (\xi, \eta, \zeta)) = \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}, \quad (x, y, z) \neq (\xi, \eta, \zeta), \quad (7.6)$$

iar în cazul plan avem

$$E((x, y), (\xi, \eta)) = \ln \frac{1}{r} = -\ln r, \quad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad (x, y) \neq (\xi, \eta). \quad (7.7)$$

Teorema 7.1.1. Fie S o **hipersuprafață netedă**, închisă sau nu din spațiul punctual afin euclidian \mathbb{E}^n asociat spațiului vectorial \mathbb{R}^n și fie $\mu(\xi)$ o funcție reală continuă definită pe S .

Expresia

$$u(\mathbf{x}) = \int_S E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mu(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad (7.8)$$

unde $d\sigma_{\mathbf{y}}$ este elementul de arie al hipersuprafeței S , a cărei poziție pe hipersuprafață este determinată de variabila de integrare \mathbf{y} , este o funcție armonică în raport cu variabila \mathbf{x} pentru toate punctele \mathbf{x} ale spațiului \mathbb{E}^n nesituate pe S .

Demonstrație. Afirmția rezultă din faptul că funcția $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ este armonică în raport cu variabila \mathbf{x} pentru $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ și din faptul că operatorii de derivare parțială de ordinul al doilea $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ se aplică sub semnul integrală din membrul al doilea al relației (7.8). q.e.d.

7.2 Proprietățile fundamentale ale funcțiilor armonice

Teorema 7.2.1. Dacă $u(\mathbf{x})$ este o funcție armonică în $D \subset \mathbb{R}^n$, atunci la fel este și funcția $u(\lambda C\mathbf{x} + \mathbf{h})$, unde λ este o constantă reală, C este o matrice ortogonală constantă de ordin n , iar $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ este un vector constant din \mathbb{R}^n , cu proprietatea că $\lambda C\mathbf{x} + \mathbf{h}$ aparține domeniului D .

Demonstrație. Amintim că matricea C se numește ortogonală dacă coincide cu inversa sa. Prin urmare, o matrice ortogonală are proprietatea $C \cdot C^t = C^t \cdot C = I_n$, unde C^t este transpusa matricei C , iar I_n este matricea unitate de ordinul n , proprietate care se poate exprima matematic prin relațiile:

$$\sum_{k=1}^n c_{ik} \cdot c_{jk} = \delta_{ij}; \quad \sum_{k=1}^n c_{ki} \cdot c_{kj} = \delta_{ij}, \quad (7.9)$$

unde δ_{ij} este elementul de pe linia i și coloana j a matricei unitate, care este egal cu 1 dacă $i = j$ și zero dacă $i \neq j$.

Folosind regula lanțului de derivare a unei funcții compuse și relațiile (7.9) deducem că au loc egalitățile

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(\lambda C\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(\mathbf{y}), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (7.10)$$

unde $\mathbf{y} = \lambda C\mathbf{x} + \mathbf{h}$.

Afirmația din teoremă este acum evidentă dacă ținem cont de (7.3), (7.9) și (7.10).

q.e.d.

Teorema 7.2.2. Dacă $u_k(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, \dots, m$, sunt funcții armonice, atunci tot astfel este și suma finită

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m c_k u_k(\mathbf{x}),$$

unde c_k sunt constante reale arbitrare.

Demonstrație. Afirmația rezultă evident din egalitatea

$$\nabla^2 \left(\sum_{k=1}^m c_k u_k(\mathbf{x}) \right) = \sum_{k=1}^m c_k \nabla^2 u_k(\mathbf{x})$$

și Definiția 7.1.4.

q.e.d.

Teorema 7.2.3. Dacă $u(\mathbf{x})$ este o funcție armonică într-un domeniu $D \subset \mathbb{R}^n$, atunci funcția

$$v(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^{2-n} u\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}\right)$$

este de asemenea o funcție armonică în toate punctele unde ea este definită.

Demonstrație. Afirmația rezultă prin verificare directă, calculând derivatele parțiale nemixte de ordinul al doilea ale funcției $v(\mathbf{x})$ și ținând cont de faptul că $u(\mathbf{x})$ este funcție armonică în D .

q.e.d.

În cazul în care domeniul $D \subset \mathbb{R}^n$ conține punctul de la infinit, definiția funcției armonice necesită unele menționări suplimentare deoarece noțiunea de derivată în punctul de la infinit nu mai are sens. Pentru aceasta, este nevoie de precizat ce se înțelege prin *vecinătate a punctului de la infinit*.

Definiția 7.2.1. Prin *vecinătatea punctului de la infinit în \mathbb{R}^n* se înțelege exteriorul bilei închise de rază R cu centrul în origine.

Exteriorul bilei închise de rază R cu centrul în origine este mulțimea punctelor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ caracterizată de inegalitatea $\|\mathbf{x}\| > R$.

Definiția 7.2.2. Se spune că funcția $u(\mathbf{x})$ este *armonică în punctul de la infinit* sau mai precis, într-o vecinătate a punctului de la infinit, când funcția

$$v(\mathbf{y}) = \|\mathbf{y}\|^{2-n} u\left(\frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2}\right) \quad (7.11)$$

este armonică în sens obișnuit într-o vecinătate a punctului $\mathbf{y} = 0$.

Expresia (7.11) are sens pentru toți $\mathbf{y} \neq 0$, iar valoarea funcției $v(\mathbf{y})$ în punctul $\mathbf{y} = 0$ este definită ca fiind limita $\lim_{\mathbf{y} \rightarrow 0} v(\mathbf{y})$.

Prin transformarea $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}$ a variabilei \mathbf{y} , rezultă formula

$$u(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^{2-n} v\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}\right).$$

Definiția 7.2.3. Printr-o *soluție regulată la infinit* $u(\mathbf{x})$ a ecuației lui Laplace se înțelege o funcție care este armonică peste tot într-o vecinătate a punctului de la infinit, cu excepția punctului de la infinit însuși și care rămâne mărginită pentru $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ în cazul $n = 2$ și tinde la zero nu mai încet decât tinde la zero $\|\mathbf{x}\|^{2-n}$ în cazul $n > 2$.

Fie D un domeniu din spațiul afin \mathbb{E}^n care are o frontieră S suficient de netedă și fie $u(\mathbf{x})$ și $v(\mathbf{x})$ două funcții reale armonice pe D , continue în $D \cup S$ împreună cu derivatele lor parțiale de ordinul întâi.

Integrând peste domeniul D identitățile

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) &= 0 \end{aligned}$$

și folosind formula integrală Gauss–Ostrogradski [8], obținem corespunzător formulele

$$\int_S v(\mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma_y = \sum_{i=1}^n \int_D \frac{\partial v}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) d\tau_{\mathbf{x}} \quad (7.12)$$

și

$$\int_S \left(v(\mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} - u(\mathbf{y}) \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} \right) d\sigma_y = 0 \quad (7.13)$$

În formulele (7.12) și (7.13), ca și în cele ce urmează, prin \mathbf{n}_y înțelegem *vectorul unitar al normalei exterioare* în punctul \mathbf{y} al hipersuprafeței S , iar $\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}$ este derivata după direcția \mathbf{n}_y a funcției $u(\mathbf{y})$ în punctul \mathbf{y} care,

după cum se știe, este egală cu produsul scalar dintre gradientul funcției u în punctul \mathbf{y} și versorul normalei exterioare \mathbf{n}_y , adică

$$\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} = (\nabla u)(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_y = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_k}(\mathbf{y}) n_{yk}(\mathbf{y}).$$

De asemenea, $d\sigma_y$ este *elementul de arie* al hipersuprafeței S în punctul curent al ei \mathbf{y} , iar $d\tau_x$ este *elementul de volum* în punctul $\mathbf{x} \in D$ care, după cum se știe este $d\tau_x = dx_1 dx_2 \cdot \dots \cdot dx_n$, unde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Pentru ca formulele (7.12) și (7.13) să rămână valabile în cazul în care D conține punctul de la infinit, situație care se întâmplă dacă D este *mulțime nemărginită*, este natural să cerem ca integranții din aceste formule să fie *funcții absolut integrabile*, sau *sumabile* în cazul când expresiile din cei doi membri ai formulelor (7.12) și (7.13) sunt înțelese ca *integrale Lebesgue*.

Formulele (7.12) și (7.13) fac posibilă stabilirea încă a unui număr de proprietăți elementare ale funcțiilor armonice.

Teorema 7.2.4. (Teorema de unicitate a funcțiilor armonice) *Dacă funcția $u(\mathbf{x})$ este armonică în domeniul D , continuă în $D \cup S$ împreună cu derivatele parțiale de ordinul întâi ale sale și egală cu zero pe frontiera S a domeniului D , atunci $u(\mathbf{x}) = 0$ peste tot în $D \cup S$.*

Demonstrație. Proprietatea indicată rezultă din egalitatea (7.12) dacă facem în ea $u(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})$. Într-adevăr, deoarece $u(\mathbf{y}) = 0$ pentru $\mathbf{y} \in S$, formula (7.12) implică

$$\sum_{i=1}^n \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\tau_x = \int_S u(\mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma_y \quad (7.14)$$

și prin urmare

$$\sum_{i=1}^n \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\tau_x = 0.$$

În consecință, $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $\mathbf{x} \in D$, adică $u(\mathbf{x}) = \text{const.}$ pentru toți $\mathbf{x} \in D$. Acum, deoarece $u(\mathbf{y}) = 0$ pentru $\mathbf{y} \in S$, în baza continuității funcției $u(\mathbf{x})$ în domeniul închis $D \cup S$, rezultă că $u(\mathbf{x}) = 0$ pentru toți $\mathbf{x} \in D \cup S$. **q.e.d.**

Teorema 7.2.5. *Fie $u(\mathbf{x})$ o funcție armonică în domeniul D și continuă în $D \cup S$ împreună cu derivatele ei parțiale de ordinul întâi.*

Dacă derivata pe direcția normală $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y})$ este egală cu zero pe frontiera S a domeniului D , atunci $u(\mathbf{x}) = \text{const.}$ pentru toți $\mathbf{x} \in D$.

Demonstrație. Această proprietate a funcțiilor armonice se demonstrează exact în același mod ca teorema precedentă. Pentru a finaliza demonstrația este suficient ca în egalitatea (7.14) să luăm în considerație faptul că $\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} = 0$ pentru toți $\mathbf{y} \in S$. **q.e.d.**

Teorema 7.2.6. *Dacă $u(\mathbf{x})$ este funcție armonică în domeniul D , continuă în $D \cup S$ împreună cu derivatele ei parțiale de ordinul întâi, atunci integrala pe hipersuprafața S a derivatei pe direcția normală este egală cu zero.*

Demonstrație. Într-adevăr, punând în (7.12), $v(\mathbf{x}) = 1$ pentru toți $\mathbf{x} \in D$, obținem

$$\int_S \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma_y = 0. \quad (7.15)$$

q.e.d.

7.3 Formule de reprezentare integrală

7.3.1 Formule de reprezentare integrală ale funcțiilor de clasă C^1 și C^2

Așa numitele *formule de reprezentare integrală* ale funcțiilor de clasă C^1 și C^2 pe un domeniu $D \subset \mathbb{E}^n$ se obțin prin introducerea soluției fundamentale $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ în *prima* și *a doua identitate a lui Green*, prezentate pentru cazul $n = 3$ în relațiile (3.86) și respectiv (3.87), bineînțeles cu luarea în considerație a Observației 3.8.1.

Deoarece soluția fundamentală conține de fapt $2n$ variabile, va trebui să precizăm care din ele sunt fixe și care sunt variabile, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. În cele ce urmează vom presupune \mathbf{x} fix, iar \mathbf{y} variabil în domeniul $D \subset \mathbb{E}^n$, adică $\mathbf{y} \in D$. Poziția lui \mathbf{x} se poate determina în funcție de domeniul D :

- punctul \mathbf{x} poate să aparțină lui D ;
- \mathbf{x} poate să fie situat pe frontiera lui D , adică $\mathbf{x} \in \partial D = S$;
- punctul \mathbf{x} se poate afla în exteriorul lui D .

Vom presupune că D este un domeniu mărginit.

Având în vedere forma soluției fundamentale, vom constata că în formulele de reprezentare integrală, pe care urmează să le demonstrăm, apar integrale improprii de forma

$$I(\mathbf{x}) = \int_D \frac{f(\mathbf{y}) d\tau_y}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha}, \quad \mathbf{x} \in D, \quad (7.16)$$

unde α este un număr real, $f(\mathbf{y})$ este o funcție definită, mărginită și integrabilă în domeniul mărginit D , iar $d\tau_y$ este elementul de volum al spațiului afin \mathbb{E}^n .

Lema 7.3.1. *Dacă $f(\mathbf{y})$ este o funcție definită, mărginită și integrabilă în domeniul mărginit D , iar $\alpha < n$, atunci integrala improprie (7.16) este convergentă.*

Demonstrație. Deoarece punctul fix \mathbf{x} aparține domeniului D , îl putem izola în bila deschisă $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ centrată în \mathbf{x} , de rază $\varepsilon > 0$, complet inclusă în D și vom putea scrie $I(\mathbf{x}) = I_\varepsilon(\mathbf{x}) + I_1(\mathbf{x})$, unde s-a notat

$$I_\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \frac{f(\mathbf{y}) d\tau_y}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha}, \quad I_1(\mathbf{x}) = \int_{D \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \frac{f(\mathbf{y}) d\tau_y}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha}. \quad (7.17)$$

Deoarece integrantul care apare în $I_1(\mathbf{x})$ este o funcție integrabilă în $D \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)$, este suficient să găsim în ce condiții este convergentă integrala $I_\varepsilon(\mathbf{x})$.

Pentru aceasta, efectuăm schimbarea de variabilă $\mathbf{y} = \mathbf{x} + r\mathbf{s}$, unde $0 \leq r \leq \varepsilon$, iar \mathbf{s} este un versor arbitrar din \mathbb{R}^n , ceea ce înseamnă că $\|\mathbf{s}\| = 1$. De asemenea, putem afirma că mulțimea versorilor \mathbf{s} constituie sfera Σ , de rază unitate cu centrul în origine, denumită pe scurt *sfera unitate* și notată cu $\Sigma(\mathbf{0}, 1)$.

Deoarece elementul de volum în $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ este $d\tau_y = r^{n-1} dr d\omega_n$, unde $d\omega_n$ este elementul de arie al sferei $\Sigma(\mathbf{0}, 1)$, iar norma vectorului $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ este egală cu raza ε a bilei $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$, rezultă că integrala improprie $I_\varepsilon(\mathbf{x})$ se prezintă ca o iterație de două integrale, una simplă, pe sfera unitate $\Sigma(\mathbf{0}, 1)$, și cealaltă integrală improprie de speța a doua $I_\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \frac{f(\mathbf{y}) d\tau_y}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha} = \int_0^\varepsilon r^{n-\alpha-1} dr \int_{\Sigma(\mathbf{0}, 1)} f(\mathbf{x} + r\mathbf{s}) d\omega_n$.

Conform unui criteriu cunoscut de convergență a integralelor improprii de forma $\int_0^a r^{n-\alpha-1} dr$, cu $a > 0$, [8], integrala $I_\varepsilon(\mathbf{x})$ tinde la zero, când $\varepsilon \rightarrow 0$, dacă $n - \alpha - 1 > -1$, ceea ce înseamnă $\alpha < n$. **q.e.d.**

Teorema 7.3.1. (Formula de reprezentare integrală a funcțiilor de clasă C^1) Dacă $u(\mathbf{x})$ este o funcție de clasă C^1 în D și de clasă C^0 pe închiderea \bar{D} a domeniului D de frontieră S , atunci are loc identitatea

$$p \omega_n u(\mathbf{x}) = \int_D \nabla_y E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot (\nabla u)(\mathbf{y}) d\tau_y - \int_S u(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma_y, \quad (7.18)$$

unde:

- $\omega_n = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} 2\pi^{n/2}$ este **aria sferei unitate** din \mathbb{E}^n ;
- $\Gamma(\lambda) = \int_0^{+\infty} x^{\lambda-1} e^{-x} dx$ este **funcția gamma a lui Euler**;
- $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ este soluția fundamentală a ecuației lui Laplace;
- $\frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}$ este derivata pe direcția normalei exterioare \mathbf{n}_y a soluției fundamentale $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$;
- p este **funcția în scară** definită în modul următor:

$$p(\mathbf{x}) = \begin{cases} +1, & \text{dacă } \mathbf{x} \in D; \\ +\frac{1}{2}, & \text{dacă } \mathbf{x} \in \partial D = S; \\ 0, & \text{dacă } \mathbf{x} \notin \bar{D}, \quad \text{adică } \mathbf{x} \in \mathbb{E}^n \setminus \bar{D}. \end{cases} \quad (7.19)$$

Demonstrație. Amintim întâi că prima identitate a lui Green scrisă pentru un domeniu $D \subset \mathbb{E}^n$, de frontieră S , se obține formal din (3.86) dacă considerăm că integrala de volum este pe domeniul n -dimensional D , iar integrala de suprafață este o integrală pe hipersuprafața S , adică

$$\int_D u(\mathbf{y})(\nabla^2 v)(\mathbf{y}) d\tau_y + \int_D \left((\nabla u)(\mathbf{y}) \right) \cdot \left((\nabla v)(\mathbf{y}) \right) d\tau_y = \int_S u(\mathbf{x}) \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma_y. \quad (7.20)$$

Dacă presupunem că $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n \setminus \bar{D}$, atunci $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \neq 0$ și deci $\nabla_y^2 E(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \nabla_x^2 E(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$, oricare ar fi \mathbf{x} în această situație. Deoarece $E(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \in C^2(D)$, dacă $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, se poate aplica prima identitate a lui Green (7.20) în ipoteza $v(\mathbf{y}) = E(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, aici \mathbf{x} considerându-se fixat în $\mathbb{E}^n \setminus \bar{D}$. Prima integrală din (7.20) va dispărea și se obține evident formula (7.18), cu $p = 0$.

Dacă însă $\mathbf{x} \in D$, formula (7.20) nu se mai poate aplica deoarece $v(\mathbf{y}) = E(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ nu este de clasă $C^2(D)$.

Pentru a elimina această dificultate, vom considera din nou bila deschisă care a fost introdusă în demonstrația Lemei 7.3.1. În domeniul $D \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ se poate aplica formula în cauză, deoarece $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \neq 0$, obținându-se astfel identitatea

$$\int_{D \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)} u(\mathbf{y}) \nabla_y^2 E(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\tau_y + \int_{D \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \left((\nabla u)(\mathbf{y}) \right) \cdot \left((\nabla_y E)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) d\tau_y = \int_{\partial(D \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon))} u(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma_y,$$

care, deoarece $\nabla_y^2 E(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$ și deoarece $\partial(D \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)) = \partial D \cup \partial B(\mathbf{x}, \varepsilon) = S \cup \Sigma$, se va putea scrie în forma

$$- \int_{\Sigma} u(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma_y = \int_{D \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \left((\nabla u)(\mathbf{y}) \right) \cdot \left((\nabla_y E)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) d\tau_y - \int_S u(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma_y, \quad (7.21)$$

unde am ținut cont că versorul normala exterioară \mathbf{n}_y în punctul $\mathbf{y} \in \Sigma$ este dirijat spre centrul sferei Σ , ceea ce înseamnă că vom avea $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} = -\frac{\partial}{\partial r}$. Având în vedere expresia (7.5) a soluției fundamentale $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, vom avea

de asemenea $\frac{\partial}{\partial r} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{n} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{1-n} = -\frac{1}{n} \varepsilon^{1-n}$, deoarece $\mathbf{y} \in \Sigma$ și deci $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \varepsilon$. Vom găsi

$$\int_{\Sigma} u(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma_y = - \int_{\Sigma(\mathbf{0}, 1)} u(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{s}) d\sigma_s, \quad (7.22)$$

unde $\Sigma(\mathbf{0}, 1)$ este sfera unitate, având elementele notate cu \mathbf{s} , iar $d\sigma_s$ este elementul de arie în punctul \mathbf{s} al acestei sfere.

Înlocuind integrala din (7.22) în identitatea (7.21), după trecere la limită pentru $\varepsilon \rightarrow 0$, găsim formula (7.18), în care $p(\mathbf{x}) = +1$, deoarece $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (D \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)) = D$ și $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma(\mathbf{0}, 1)} u(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{s}) d\sigma_s = u(\mathbf{x}) \omega_n$.

Dacă $\mathbf{x} \in \partial D = S$, vom extrage din D o semibilă $B'(\mathbf{x}, \varepsilon)$, cu centrul în \mathbf{x} și rază $\varepsilon > 0$.

Raționamentul anterior se aplică în întregime, singura diferență constând în faptul că în loc de integralele care apar în (7.22), care sunt calculate pe sfera Σ cu centrul în \mathbf{x} și rază ε vor apărea aceleași integrale, însă calculate pe o emisferă.

Notând cu Σ' această emisferă, vom avea:

$$- \int_{\Sigma'} u(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma_y = \int_{D \setminus B'(\mathbf{x}, \varepsilon)} \left((\nabla u)(\mathbf{y}) \right) \cdot \left((\nabla_y E)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) d\tau_y - \int_S u(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma_y; \quad (7.23)$$

$$\int_{\Sigma'} u(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma_y = - \int_{\Sigma'(\mathbf{0}, 1)} u(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{s}) d\sigma_s; \quad (7.24)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma'} u(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma_y = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma'(\mathbf{0}, 1)} u(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{s}) d\sigma_s = -\frac{1}{2} \omega_n u(\mathbf{x}). \quad (7.25)$$

unde $\Sigma'(\mathbf{0}, 1)$ este *emisfera unitate*, a cărei arie este $\frac{1}{2} \omega_n$

Analizând acest de al treilea procedeu și ținând cont de (7.24) și (7.25), după trecerea la limită pentru $\varepsilon \rightarrow 0$ în (7.23), constatăm că (7.18) este adevărată și în cazul $\mathbf{x} \in S = \partial D$. **q.e.d.**

Teorema 7.3.2. (Formula de reprezentare integrală a funcțiilor de clasă C^2) Dacă $u(\mathbf{x})$ este o funcție de clasă C^2 în D și de clasă $C^1(\overline{D})$ și S este frontiera lui D , atunci are loc identitatea

$$p \omega_n u(\mathbf{x}) = - \int_S u(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma_y + \int_S E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma_y - \int_D E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\nabla^2 u)(\mathbf{y}) d\tau_y, \quad (7.26)$$

în care p este funcția în scară definită prin (7.19).

Demonstrație. Scriind identitatea lui Green (7.20), în care $v(\mathbf{y}) = u(\mathbf{y})$, iar $u(\mathbf{y}) = E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, obținem relația

$$\int_D E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\nabla^2 u)(\mathbf{y}) d\tau_y + \int_D \left((\nabla_y E)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) \cdot \left((\nabla u)(\mathbf{y}) \right) d\tau_y = \int_S E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma_y. \quad (7.27)$$

După cum ne convingem imediat, egalitatea (7.27) are sens căci punând aici $D \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ în loc de D și făcând apoi $\varepsilon \rightarrow 0$, obținem o relație din care putem extrage termenul $\int_D \left((\nabla_y E)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) \cdot \left((\nabla u)(\mathbf{y}) \right) d\tau_y$ care, înlocuit în (7.18), conduce exact la formula (7.26). **q.e.d.**

7.3.2 Formulă de reprezentare integrală a unei funcții armonice

Teorema 7.3.3. Pentru o funcție armonică într-un domeniu D de frontieră S , continuă în $D \cup S$ împreună cu derivatele parțiale de ordinul întâi, are loc **formula de reprezentare integrală**

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\omega_n} \int_S E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma_y - \frac{1}{\omega_n} \int_S u(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma_y. \quad (7.28)$$

$\omega_n = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} 2\pi^{n/2}$ este aria sferei de rază unitate din \mathbb{E}^n , iar Γ este **funcția Gamma a lui Euler**.

Demonstrație. Pentru a deduce formula (7.28), alegem un punct arbitrar $\mathbf{x} \in D$ și considerăm bila închisă $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq \varepsilon$ de rază $\varepsilon > 0$, situată în întregime în D . Notăm cu D_ε partea din domeniul D care rămâne în afara bilei. Aplicăm formula (7.13) domeniului D_ε , a cărui frontieră este reuniunea dintre frontiera S a lui D și frontiera bilei, de ecuația $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \varepsilon$. În locul funcției $v(\mathbf{y})$ vom considera $v(\mathbf{y}) = E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Obținem

$$\int_S \left(E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} - u(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} \right) d\sigma_y = \int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|=\varepsilon} \left(E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} - u(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} \right) d\sigma_y. \quad (7.29)$$

Celui de al doilea termen din membrul doi îi adunăm și scădem termenul $u(\mathbf{x}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}$ și astfel membrul doi al egalității (7.29) devine

$$\int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|=\varepsilon} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma_y - \int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|=\varepsilon} \left(u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x}) \right) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma_y - u(\mathbf{x}) \int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|=\varepsilon} \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma_y. \quad (7.30)$$

Pe de altă parte, pe sfera $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \varepsilon$, avem

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\varepsilon^{n-2}} & \text{pentru } n > 2, \\ -\ln \varepsilon & \text{pentru } n = 2, \end{cases} \\ \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} &= \begin{cases} -\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} & \text{pentru } n > 2, \\ -\frac{1}{\varepsilon} & \text{pentru } n = 2, \end{cases} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|=\varepsilon} \left(u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x}) \right) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma_y &= 0, \\ \int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|=\varepsilon} \frac{d\sigma_y}{\varepsilon^{n-1}} &= \omega_n. \end{aligned}$$

Prin urmare, în baza relației (7.15), prin trecere la limită pentru $\varepsilon \rightarrow 0$ în egalitatea (7.29) în care se ține cont de (7.30), se obține reprezentarea integrală (7.28). **q.e.d.**

Observația 7.3.1. Formula (7.28), de reprezentare integrală a unei funcții armonice în $D \subset \mathbb{E}^n$, se poate obține direct din (7.26) dacă se ține cont de faptul că funcția $u(\mathbf{x})$ este armonică în D .

7.4 Formule de medie ale unei funcții armonice

Teorema 7.4.1. Dacă $\varphi(\mathbf{x})$ este o funcție armonică pe un domeniu $D \subset \mathbb{E}^n$, atunci valoarea sa într-un punct $\mathbf{x} \in D$ este egală cu media valorilor luate pe frontiera unei bile închise arbitrare cu centrul în \mathbf{x} și rază R inclusă în D , adică

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|=R} u(\mathbf{y}) d\sigma_y. \quad (7.31)$$

Demonstrație. Într-adevăr, deoarece pe sfera $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = R$ avem egalitățile

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)R^{n-2}} & \text{pentru } n > 2, \\ -\ln R & \text{pentru } n = 2, \end{cases}$$

$$\frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} = \begin{cases} -\frac{1}{R^{n-1}} & \text{pentru } n > 2, \\ -\frac{1}{R} & \text{pentru } n = 2, \end{cases}$$

este ușor de văzut că, în baza formulei (7.15), din formula de reprezentare integrală (7.28), obținem (7.31).

Scriind formula (7.31) pentru sfera $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \rho \leq R$ în forma

$$\rho^{n-1} u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|=\rho} u(\mathbf{y}) d\sigma_y$$

și integrând această egalitate în raport cu ρ pe compactul $[0, R]$, obținem

$$u(\mathbf{x}) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|\leq R} u(\mathbf{y}) d\tau_y, \quad (7.32)$$

unde $d\tau_y$ este elementul de volum a cărei locație în D este specificată prin variabila \mathbf{y} , iar $\frac{\omega_n R^n}{n}$ este volumul bilei deschise $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < R$.

Formulele (7.32) și (7.31) sunt cunoscute ca **formule de medie ale unei funcții armonice** pentru o bilă deschisă și respectiv pentru frontiera acesteia. **q.e.d.**

Folosind coordonatele polare în plan și în spațiu, formula de medie (7.31) se poate rescrie în respectiv formele:

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_1 + R \cos \theta, x_2 + R \sin \theta) d\theta, \quad (7.33)$$

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} u(x_1 + R \sin \theta \cos \psi, x_2 + R \sin \theta \sin \psi, x_3 + R \cos \theta) \sin \theta d\psi. \quad (7.34)$$

7.5 Principiu de extrem pentru funcții armonice

Considerăm o funcție $u(\mathbf{x})$, armonică în domeniul $D \subset \mathbb{R}^n$, și notăm cu m și M marginile inferioară și superioară ale valorilor funcției respective.

Din egalitatea (7.32) cu ușurință se poate stabili următoarea proprietate cunoscută sub numele de **principiu de extrem pentru funcții armonice**.

Teorema 7.5.1. *O funcție $u(\mathbf{x})$, armonică pe un domeniu D , nu poate lua valorile sale maxime sau minime în puncte ale domeniului D decât dacă se reduce la o constantă.*

Demonstrație. Când $M = +\infty$ sau $m = -\infty$ afirmația din teoremă este evidentă deoarece funcția $u(\mathbf{x})$ poate lua numai valori finite în orice punct al domeniului D . Presupunem atunci că $M \neq +\infty$ și că există un punct $\mathbf{x}_0 \in D$ în care funcția $u(\mathbf{x})$ ia valoarea sa maximă pe D ,

$$u(\mathbf{x}_0) \geq u(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in D. \quad (7.35)$$

Dacă B_0 este o bilă cu centrul în \mathbf{x}_0 și rază a_0 astfel aleasă încât B_0 și frontiera sa S_0 să fie incluse în D , atunci din (7.31) și (7.35) rezultă

$$u(\mathbf{x}_0) \geq \frac{1}{\omega_n a_0^{n-1}} \int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_0\|=a_0} u(\mathbf{y}) d\sigma_y. \quad (7.36)$$

Dacă pe sfera $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| = a_0$ există un punct \mathbf{x}_1 în care $u(\mathbf{x}_1) < u(\mathbf{x}_0)$, datorită continuității funcției $u(\mathbf{x})$, există o vecinătate V_1 a punctului \mathbf{x}_1 pentru care $u(\mathbf{x}) < u(\mathbf{x}_0)$ și inegalitatea (7.36) devine strictă

$$u(\mathbf{x}_0) > \frac{1}{\omega_n a_0^{n-1}} \int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_0\|=a_0} u(\mathbf{y}) d\sigma_y, \quad (7.37)$$

ceea ce contrazice egalitatea (7.31). Rezultă $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_0)$, $\forall \mathbf{x} \in S_0$, și aceasta pentru orice sferă care îndeplinește condițiile enunțate, în particular pentru sferele cu centrul în \mathbf{x}_0 și cu rază $a < a_0$. Deci

$$u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_0), \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{B_0} = B_0 \cup S_0.$$

Valoarea maximă $u(\mathbf{u}_0)$ fiind egală cu $u(\mathbf{x}_1)$, $\forall \mathbf{x}_1 \in S_0$, repetând raționamentul pentru o bilă B_1 cu centrul în \mathbf{x}_1 aleasă astfel ca $B_1 \cup S_1 = \overline{B_1} \subset D$, rezultă că $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_1) = u(\mathbf{x}_0)$, $\forall \mathbf{x} \in B_1$ etc. Fie $\mathbf{y} \in D$ arbitrar. Cum D este mulțime conexă, există o linie poligonală L , de lungime finită, care unește \mathbf{x}_0 cu \mathbf{y} . Luând $\mathbf{x}_1 = S_0 \cap L$, $\mathbf{x}_2 = S_1 \cap L$ etc., după un număr finit de pași obținem o bilă B_n astfel încât $\mathbf{y} \in \overline{B_n}$, deci $u(\mathbf{y}) = u(\mathbf{x}_0)$, $\forall \mathbf{y} \in D$. În concluzie, dacă $u(\mathbf{x})$, armonică pe D , ia într-un punct $\mathbf{x}_0 \in D$ valoarea sa maximă, $u(\mathbf{x})$ se reduce la o constantă pe D .

Așadar, din raționamentul dezvoltat mai sus, rezultă că punctul de extrem \mathbf{u}_0 nu poate aparține interiorului domeniului D , și în consecință $\mathbf{u}_0 \in S_0$. **q.e.d.**

condiție la frontieră, atunci diferența lor $w(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) - v(\mathbf{x})$ este egală cu zero pe frontiera S a domeniului D , și prin urmare, în baza principiului de extrem pentru o funcție armonică, $w(\mathbf{x}) = 0$, adică $u(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})$ pretutindeni în $D \cup S$.

7.6 Problema Dirichlet și problema Neumann

Când se deduc anumite ecuații cu derivate parțiale din legi generale care guvernează fenomene ale naturii, apar în mod natural condiții suplimentare impuse soluțiilor căutate. Demonstrarea *existenței* și *unicității* soluțiilor care satisfac condiții suplimentare specifice (la limită sau pe frontieră și eventual inițiale) joacă un rol important în teoria ecuațiilor cu derivate parțiale.

Dacă atunci când au loc mici variații ale datelor conținute atât în ecuații cât și în condițiile suplimentare impuse soluțiilor se produc mici variații ale soluțiilor care satisfac ecuațiile și condițiile modificate spunem că soluțiile sunt *stabile* sau că *problemele sunt bine puse* (*corect puse*). Altminteri, problemele în chestiune se zic *probleme puse impropriu* sau *probleme incorect puse*.

Este bine de menționat că condițiile problemelor care trebuiesc să fie satisfăcute de către soluțiile căutate depind de tipul ecuației cu derivate parțiale considerate.

Să formulăm acum o problemă la limită a cărei corectitudine se va demonstra ulterior.

Presupunem că S , frontiera unui domeniu mărginit D din spațiul afin n -dimensional \mathbb{E}^n , asociat spațiului euclidian \mathbb{R}^n , este o *hipersuprafață netedă* $(n-1)$ -dimensională.

În cele ce urmează, prin *suprafață* în \mathbb{E}^n vom înțelege o hipersuprafață $(n-1)$ -dimensională de acest tip. Preferăm acest stil de prezentare, general la prima vedere, în dorința de a prinde simultan cele două cazuri întâlnite cel mai frecvent în practica curentă. Primul caz este acela în care $n=3$, hipersuprafața fiind acum suprafața obișnuită din spațiul euclidian tridimensional, iar cel de al doilea este cel în care $n=2$, când hipersuprafața este înlocuită de o curbă plană.

Să formulăm următoarea problemă: *să se determine acea soluție $u(\mathbf{x})$ a ecuației (7.3) care să fie regulată în domeniul D , continuă în regiunea închisă $D \cup S$ și care să satisfacă condiția la limită*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}} u(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{y}); \quad \mathbf{x} \in D, \quad \mathbf{y} \in S, \quad (7.38)$$

unde φ este o funcție continuă dată definită pe S .

Problema astfel formulată este cunoscută sub numele *prima problemă la limită fundamentală* sau *problema Dirichlet*.

Problema Neumann constă în determinarea unei funcții $u(\mathbf{x})$, armonică pe domeniul $D \subset \mathbb{E}^n$, pentru care sunt date valorile derivatei sale după direcția versorului \mathbf{n} al normalei exterioare

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in S, \quad (7.39)$$

în toate punctele \mathbf{x} aparținând frontierei S a domeniului D , în care normala $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ este continuă. Funcția $\psi(\mathbf{x})$ este considerată cunoscută, dată și este o funcție continuă.

Problema Neumann pentru ecuația lui Laplace este cunoscută și sub numele de *a doua problemă la limită* sau *a doua problemă fundamentală*.

Aceste două probleme, referindu-se la un domeniu mărginit, se numesc *probleme interioare*. Următoarele probleme, referitoare la domenii nemărginite, se numesc *probleme exterioare*.

Fie D un domeniu nemărginit și S frontiera sa formată din una sau mai multe suprafețe cu normala $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ continuă pe porțiuni. Dăm ca exemplu următoarele domenii nemărginite din \mathbb{E}^3 , spațiul afin asociat spațiului liniar \mathbb{R}^3 , în care s-a ales reperul cartezian ortogonal $Oxyz$:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 > R^2\}, \quad R > 0; \\ D_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}; \\ D_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 > R^2, \quad z > 0\}, \quad R > 0; \\ D_4 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-2)^2 + y^2 > 1, \quad x > 0\}. \end{aligned}$$

Mulțimea D_1 reprezintă exteriorul bilei închise cu centrul în origine de rază R și este o mulțime deschisă, conexă, dar nemărginită. Domeniul D_2 este semispațiul superior. Mulțimea D_3 este semispațiul superior din care s-a înlăturat jumătatea superioară din cilindrul circular închis, de rază R , cu axa de rotație axa Oz . Ultima mulțime este situată în semispațiul $x > 0$ dar și în exteriorul cilindrului cu generatoarele paralele cu Oz , având curba directoare cercul de rază 1 și centrul în punctul $C(2, 0, 0)$ situat în planul Oxy . Domeniile D_2 , D_3 și D_4 sunt de asemeni nemărginite.

Problema lui Dirichlet pentru un domeniu nemărginit $D \subset \mathbb{E}^n$ este următoarea: să se determine o funcție $u(\mathbf{x})$, armonică pe D , cu următoarele condiții:

$$u(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in S; \quad \lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}) = 0,$$

unde $\varphi(\mathbf{x})$ este o funcție dată, definită pe frontiera S a domeniului D .

Problema Neumann pentru un domeniu nemărginit $D \subset \mathbb{E}^n$ constă în determinarea unei funcții $u(\mathbf{x})$, armonică pe D , date fiind valorile derivatei $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x})$ în toate punctele $\mathbf{x} \in S$ în care \mathbf{n} este continuă, iar $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}) = 0$.

Teorema 7.6.1. *Soluția problemei Dirichlet este unică, atât în cazul domeniilor mărginite cât și în cazul domeniilor nemărginite.*

Soluția problemei Neumann pentru domenii mărginite este determinată în afara unei constante aditive.

În cazul domeniilor nemărginite, soluția $u(\mathbf{x})$ a problemei Neumann care satisface condițiile suplimentare

$$|u(\mathbf{x})| \leq \frac{C}{\|\mathbf{x}\|^\lambda}, \quad \max \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right|, \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \right|, \dots, \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right| \right\} \leq \frac{K}{\|\mathbf{x}\|^{1+\lambda}}, \quad \|\mathbf{x}\| > R_0,$$

unde C, K, R_0, λ sunt constante strict pozitive date și $\lambda > \frac{n-2}{2}$, este unică.

Demonstrație. Să presupunem că există două soluții ale problemei Dirichlet, $u_1(\mathbf{x})$ și $u_2(\mathbf{x})$

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_1(\mathbf{x}) &= 0, \quad \nabla^2 u_2(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{pe } D, \\ u_1(\mathbf{x}) &= \varphi(\mathbf{x}), \quad u_2(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in S. \end{aligned}$$

Diferența lor $u(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x})$ va fi o funcție armonică pe D , nulă pe frontiera S . În plus, în cazul când D este domeniu nemărginit

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}) = 0.$$

În aceste condiții, funcția $u(\mathbf{x})$ este nulă pe D . Într-adevăr, dacă ar lua valori strict pozitive în puncte ale domeniului D , ar rezulta că $u(\mathbf{x})$ ar lua valoarea sa maximă într-un punct din D , fapt care contrazice Teorema 7.5.1. Pentru motive similare, $u(\mathbf{x})$ nu poate lua valori strict negative pe D . Cum $u(\mathbf{x}) = 0$ pe D , rezultă $u_1(\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x})$ și unicitatea soluției problemei Dirichlet este dovedită.

Să considerăm acum problema Neumann pentru un domeniu mărginit D de frontieră S . Presupunem că admite două soluții $u_1(\mathbf{x})$ și $u_2(\mathbf{x})$. Diferența lor $u(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x})$ este funcție armonică pe D și $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$, pe S . Din (7.12), în care punem $u = v$, rezultă $\int_D \|(\nabla u)(\mathbf{x})\|^2 d\tau_x = 0$. Funcția $u(\mathbf{x})$ este de clasă $C^2(D)$, deci $F(\mathbf{x}) = \|(\nabla u)(\mathbf{x})\|^2$ este continuă și pozitivă pe D . Să presupunem că există $\mathbf{x}_0 \in D$ pentru care $F(\mathbf{x}_0) > 0$. Datorită continuității, există o vecinătate $V_0 \subset D$ a punctului \mathbf{x}_0 pe care F ia valori strict pozitive, deci $\int_{V_0} F(\mathbf{x}) d\tau_x > 0$. Rezultă că $\int_D \|(\nabla u)(\mathbf{x})\|^2 d\tau_x = \int_{V_0} F(\mathbf{x}) d\tau_x > 0$, care contrazice egalitatea de mai sus. Prin urmare, $F(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in D$. Deci, în toate punctele domeniului D ,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2 = 0.$$

Această egalitate are loc dacă $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$ în orice punct \mathbf{x} al domeniului D , deci $u(\mathbf{x})$ se reduce la o constantă pe D , adică cele două soluții $u_1(\mathbf{x})$ și $u_2(\mathbf{x})$ diferă printr-o constantă.

În cazul când domeniul D este nemărginit, presupunând că $u(\mathbf{x})$ verifică inegalitățile din enunțul Teoremei 7.6.1, considerăm o sferă Σ cu centrul în originea reperului și de rază $a > R_0$. Fie B_a bila care are frontiera S . Notăm $D_a = D \cap B_a$. Frontiera domeniului D_a este formată din o parte a frontierei S pe care o notăm cu S' și o parte a sferei Σ pe care o notăm cu Σ' . Evident, este posibil ca $\Sigma = \Sigma'$ sau $S = S'$.

Să presupunem că există două soluții $u_1(\mathbf{x})$ și $u_2(\mathbf{x})$ ale problemei Neumann pentru domeniul D nemărginit, verificând condițiile suplimentare. Diferența lor $u(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x})$ este funcție armonică pe D cu $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$, pe S . În plus, pentru $\|\mathbf{x}\| > R_0$ avem

$$|u(\mathbf{x})| \leq \frac{C}{\|\mathbf{x}\|^\lambda}, \quad \max \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right|, \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \right|, \dots, \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right| \right\} \leq \frac{K}{\|\mathbf{x}\|^{1+\lambda}}. \quad (7.40)$$

Prin urmare, $u(\mathbf{x})$ este funcție armonică pe D_a , $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$, pe S' iar pe Σ' sunt satisfăcute condițiile (7.40), cu $\|\mathbf{x}\| = a$.

Să scriem formula (7.12) pentru $u = v$ și domeniul D_a ,

$$\int_{S'} u(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\sigma_y + \int_{\Sigma'} u(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\sigma_y = \int_{D_a} \|(\nabla u)(\mathbf{x})\|^2 d\tau_x. \quad (7.41)$$

Deoarece $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$, pe S' , prima integrală din (7.41) este nulă. Evaluăm a doua integrală ținând seama de condițiile (7.40). Avem

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right| = |(\nabla u) \cdot \mathbf{n}| \leq \|(\nabla u)(\mathbf{x})\| \leq \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right| + \dots + \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right|,$$

deci

$$\left| \int_{\Sigma'} u(\mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) d\sigma_y \right| \leq \int_{\Sigma'} |u(\mathbf{y})| \left| \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) \right| d\sigma_y \leq \frac{2C}{a^\lambda} \cdot \frac{6K}{a^{1+\lambda}} \int_{\Sigma'} d\sigma_y.$$

Ultima integrală, fiind aria unei porțiuni din sfera Σ , este mai mică decât $\omega_n a^{n-1}$, deci

$$\left| \int_{\Sigma'} u(\mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) d\sigma_y \right| \leq \frac{12CK}{a^{2\lambda+2-n}}.$$

Prin ipoteză, $\lambda > \frac{n-2}{2}$ și pentru a suficient de mare, membrul doi al acestei inegalități este mai mic decât orice $\varepsilon > 0$ dat. Revenind la egalitatea (7.41) rezultă că pentru $\varepsilon > 0$ există $\eta(\varepsilon) > 0$, astfel încât pentru orice $a > \eta(\varepsilon)$,

$$\int_{D_a} \|(\nabla u)(\mathbf{x})\|^2 d\tau_x < \varepsilon,$$

fapt care este posibil, numai dacă $\left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| = \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right| = \dots = \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right| = 0$ pe D_a pentru orice $a > \eta(\varepsilon)$. Deci $u(\mathbf{x})$ se reduce la o constantă pe D . Ținând seama că $\lim_{\|\mathbf{x}\|} u(\mathbf{x}) = 0$, rezultă $u(\mathbf{x}) = 0$ pe D , deci $u_1(\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x})$ și unicitatea soluției este dovedită. q.e.d.

7.7 Funcția lui Green a problemei Dirichlet pentru ecuația lui Laplace

Definiția 7.7.1. Prin funcție Green a problemei Dirichlet pentru ecuația lui Laplace într-un domeniu $D \subset \mathbb{R}^n$ se înțelege funcția $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ depinzând de punctele $\mathbf{x} \in D \cup S$ și $\mathbf{y} \in D \cup S$ care are următoarele proprietăți:

(1) această funcție are forma

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + g(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (7.42)$$

unde $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ este soluția fundamentală a ecuației lui Laplace în n dimensiuni, iar $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ este o funcție armonică atât în raport cu variabila $\mathbf{x} \in D$, cât și în raport cu variabila $\mathbf{y} \in D$;

(2) când punctul \mathbf{x} sau \mathbf{y} se află pe frontiera S a domeniului D , este satisfăcută egalitatea

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad (7.43)$$

Este ușor de văzut că $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ peste tot în domeniul D . Într-adevăr, să notăm prin D_δ acea parte a domeniului D care se situează în afara bilei închise $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \delta$, unde $\mathbf{y} \in D$, de rază suficient de mică, $\delta > 0$. Deoarece $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = +\infty$, pentru δ suficient de mic, trebuie să avem inegalitatea $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0$, când $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$. În consecință, $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ pe frontiera domeniului D_δ și prin urmare, conform principiului de extrem (Teorema 7.5.1), $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ pentru toți $\mathbf{x} \in D_\delta$ ceea ce face să concluzionăm că $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ pretutindeni în $D \cup S$.

Teorema 7.7.1. *Funcția lui Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ este simetrică în raport cu variabilele sale:*

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D.$$

Demonstrație. Pentru a demonstra această proprietate, să includem punctele \mathbf{x} și \mathbf{y} în bilele închise $d : \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| \leq \delta$ și $d' : \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| \leq \delta$ de rază $\delta > 0$, suficient de mică. Partea din afara celor două bile va fi notată cu D_δ .

Funcțiile $v(\mathbf{z}) = G(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ și $u(\mathbf{z}) = G(\mathbf{z}, \mathbf{x})$ sunt armonice în interiorul domeniului D situat în exteriorul bilelor d și d' . Aplicând formula (7.13) domeniului D_δ obținem egalitatea

$$\begin{aligned} \int_S \left(G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{z}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}_z} - G(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{z}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_z} \right) dS_z &= \int_C \left(G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{z}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}_z} - G(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{z}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_z} \right) dS_z + \\ &+ \int_{C'} \left(G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{z}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}_z} - G(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{z}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_z} \right) dS_z, \end{aligned}$$

unde \mathbf{n}_z denotă normala unitară exterioară în puncte \mathbf{z} aparținând atât lui S cât și sferelor $C : \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| = \delta$ și $C' : \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| = \delta$.

În baza Definiției 7.7.1, $G(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = 0$, $z \in S$, astfel că ultima formulă se rescrie în forma

$$\int_C \left(G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{z}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}_z} - G(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{z}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_z} \right) dS_z = \int_{C'} \left(G(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{z}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_z} - G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{z}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}_z} \right) dS_z.$$

În final, folosind relațiile:

$$G(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = E(\mathbf{z}, \mathbf{x}) + g(\mathbf{z}, \mathbf{x}); \quad G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = E(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + g(\mathbf{z}, \mathbf{y}),$$

unde $g(\mathbf{z}, \mathbf{x})$ și $g(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ sunt funcții armonice, prin trecere la limită pentru $\delta \rightarrow 0$, obținem egalitatea $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, pe care trebuia să o demonstrăm. **q.e.d.**

Acum, fie că $u(\mathbf{x})$ din formula de reprezentare integrală (7.28) este soluția problemei Dirichlet pentru ecuația lui Laplace și să înlocuim în (7.28) pe $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ cu $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Atunci, repetarea argumentelor din obținerea formulei (7.28) și aplicarea lui (7.42) și (7.43) conduce la formula

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\omega_n} \int_S \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} \varphi(\mathbf{y}) dS_y, \quad (7.44)$$

unde φ este o funcție reală continuă dată.

Când funcția lui Green este cunoscută, formula (7.44) exprimă soluția problemei Dirichlet pentru ecuația lui Laplace în următorul mod: *să se determine funcția $u(\mathbf{x})$, armonică în D , continuă pe $D \cup S$ și care satisface condiția la limită*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} u(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}_0); \quad \mathbf{x} \in D, \quad \mathbf{x}_0 \in S. \quad (7.45)$$

Faptul că funcția $u(\mathbf{x})$ dată în formula (7.44) este armonică rezultă din faptul că funcția $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ este armonică în raport cu \mathbf{x} pentru $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Totuși, faptul că această funcție satisface condiția la limită (7.45) cere o demonstrație specială.

7.8 Potențialul de masă

Să considerăm expresia

$$u(\mathbf{x}) = \int_D E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mu(\mathbf{y}) d\tau_y, \quad (7.46)$$

unde D este un domeniu din \mathbb{E}^n , $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ este soluția fundamentală introdusă în (7.5), iar $\mu(\mathbf{y})$ este o funcție definită pe domeniul D .

Funcția (7.46) este o integrală depinzând de n parametri, coordonatele punctului $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$.

Definiția 7.8.1. Când integrala din membrul drept al formulei (7.46) este convergentă, funcția $u(\mathbf{x})$ se numește *potențial al unei distribuții n -dimensionale de masă sau potențial de masă cu densitatea de masă sau densitatea de volum μ în domeniul D* .

În cazul când $n = 3$ pentru potențialul de masă se folosește denumirea de *potențial newtonian* sau *potențial de volum*.

Dacă $n = 2$ potențialul de masă corespunzător poartă denumirea de *potențial logaritm*.

Având în vedere expresia soluției fundamentale în cazul $n = 2$, rezultă că potențialul logaritm are expresia

$$u(x_1, x_2) = \int_D \mu(\xi_1, \xi_2) \ln \frac{1}{r} d\xi_1 d\xi_2, \quad (7.47)$$

unde $r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}$ este distanța euclidiană între punctele de coordonate (x_1, x_2) și (ξ_1, ξ_2) .

În cele ce urmează vom presupune că D este un domeniu mărginit.

Deoarece soluția fundamentală $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ este o funcție armonică pentru $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, potențialul de volum $u(\mathbf{x})$ din (7.46) este funcție armonică pentru puncte \mathbf{x} situate în afara mulțimii $D \cup S$, unde S este frontiera domeniului D . În plus, în cazul $n > 2$ funcția $u(\mathbf{x})$ tinde la zero pentru $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$.

Folosind teoria integralelor depinzând de parametri [8], se pot demonstra cu ușurință următoarele teoreme.

Teorema 7.8.1. Dacă funcția μ este continuă și mărginită în domeniul D , potențialul de volum $u(\mathbf{x})$ este o funcție continuă care are derivate parțiale de ordinul întâi, continue în \mathbb{E}^n , exprimate de formulele

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \int_D \frac{\partial}{\partial x_i} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mu(\mathbf{y}) d\tau_y \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (7.48)$$

Teorema 7.8.2. Dacă densitatea de masă μ posedă derivate parțiale de ordinul întâi, continue și mărginite în D , atunci potențialul de volum (7.46) admite derivate parțiale de ordinul al doilea în D .

În baza acestor teoreme, pentru $\mathbf{x} \in D$ se obține relația

$$(\nabla^2 u)(\mathbf{x}) = -\omega_n \mu(\mathbf{x}), \quad (7.49)$$

care, în cazul $n = 2$, devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = -2\pi \mu(x_1, x_2). \quad (7.50)$$

În baza formulelor (7.49) și (7.50) deducem că funcția definită de relația

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\omega_n} \int_D G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\tau_y, \quad (7.51)$$

unde $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ este funcția lui Green a problemei Dirichlet pentru funcții armonice în domeniul D , iar $f(\mathbf{x})$ este o funcție mărginită care are derivate parțiale de ordinul întâi continue și mărginite în D , este o soluție regulată a ecuației Poisson

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D. \quad (7.52)$$

De asemenea, se poate arăta că funcția (7.51) satisface condiția la limită omogenă

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in D, \quad \mathbf{x}_0 \in S. \quad (7.53)$$

Astfel, dacă funcția lui Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ este cunoscută, potențialul de volum $u(\mathbf{x})$ determinat prin formula (7.51) dă soluția, în domeniul D , pentru problema Dirichlet omogenă (7.53) a ecuației Poisson (7.52).

Acum, în locul condiției la limită omogenă de tipul (7.53), să considerăm o *condiție la limită neomogenă* de forma

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} u(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x} \in D, \quad \mathbf{x}_0 \in S. \quad (7.54)$$

Dacă $v(\mathbf{x})$ este o funcție armonică în D care satisface condiția la limită (7.54), adică

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} v(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x} \in D, \quad \mathbf{x}_0 \in S$$

și dacă $u(\mathbf{x})$ este soluția căutată a problemei Dirichlet neomogene (7.54) pentru ecuația Poisson (7.52), atunci diferența $u(\mathbf{x}) - v(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x})$ este o soluție regulată a ecuației

$$\nabla^2 w(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D$$

care satisface condiția la limită omogenă

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} w(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in D, \quad \mathbf{x}_0 \in S. \quad (7.55)$$

Prin urmare, problema determinării soluției $u(\mathbf{x})$ a problemei Dirichlet neomogene (7.54) pentru ecuația Poisson (7.52) se reduce la determinarea soluției $w(\mathbf{x})$ ale aceleiași ecuații care însă satisface condiția la limită omogenă (7.55).

7.9 Potențialii de simplu strat și dublu strat

Pe lângă potențialul de masă, prezentat în paragraful precedent, formulele de reprezentare integrală (7.18), (7.26) și (7.28) introduc în studiu alte două integrale care depind de parametri, calculate pe hipersuprafețe $(n-1)$ -dimensionale din \mathbb{E}^n , de forma:

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial D} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mu(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}; \quad (7.56)$$

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial D} \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} d\sigma_{\mathbf{y}}, \quad (7.57)$$

denumite respectiv *potențial de simplu strat* și *potențial de dublu strat*.

În cazul $n = 2$, potențialul de simplu strat are expresia

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_C \mu(\mathbf{y}) \ln \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} ds_{\mathbf{y}}, \quad (7.58)$$

unde C este o *curbă Jordan, simplă și închisă*, care are *curbură continuă*, $ds_{\mathbf{y}}$ este *elementul de arc* al curbei, iar μ este o *funcție de două ori continuu diferențiabilă*, numită *densitate de potențial*. Curba C este frontiera unui domeniu mărginit $D \subset \mathbb{E}^n$.

Observând că (7.58) se poate scrie în forma alternativă

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{\ln \|\mathbf{x}\|}{2\pi} \int_C \mu(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} + \frac{1}{2\pi} \int_C \ln \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \mu(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}}, \quad (7.59)$$

deducem că $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}) = 0$ numai atunci când este îndeplinită condiția

$$\int_C \mu(\mathbf{y}) ds_{\mathbf{y}} = 0.$$

Potențialul de dublu strat în plan are forma

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_C \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \ln \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| ds_y. \quad (7.60)$$

Desigur, potențialul de masă în cazul a două dimensiuni este

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_D \mu(\mathbf{y}) \ln \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} dy_1 dy_2, \quad (7.61)$$

unde $dy_1 dy_2$ este *elementul de arie în plan*.

Denumirile date acestor integrale depinzând de parametri justifică o altă interpretare a formulelor integrale ale unei funcții de clasă C^1 și C^2 , sau a unei funcții armonice, și anume *formule de reprezentare prin potențiali*.

Dacă $n = 3$, ținând cont de forma soluției fundamentale și de faptul că în acest caz aria sferei unitate este 4π , rezultă că potențialii de simplu strat, de strat dublu și de masă au respectiv expresiile

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\mu(\mathbf{y})}{r} d\sigma_y, \quad (7.62)$$

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \mu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma_y, \quad (7.63)$$

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\mu(\mathbf{y})}{r} dy_1 dy_2 dy_3, \quad (7.64)$$

unde S este o suprafață simplă, închisă, care mărginește domeniul $D \subset \mathbb{R}^3$, $d\sigma_y$ este elementul de arie în punctul $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ al suprafeței S , $dy_1 dy_2 dy_3$ este elementul de volum în spațiul tridimensional, iar r este distanța euclidiană dintre punctele $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ și \mathbf{y} , adică $r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$.

Integralele care definesc potențialul de volum și potențialii de simplu și dublu strat care apar în formulele de reprezentare sunt improprii, deoarece integranzii respectivi sunt funcții discontinue. Pentru convergența lor însă se poate aplica Lema 7.3.1, ținând evident cont că dimensiunea varietății ∂D este $n - 1$. Atât în această leamă cât și în toate formulele care conțin integrale improprii de acest tip, integralele se înțeleg *în sensul valorii principale Cauchy*, adică vom scrie

$$\int_D \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\beta \cdot f(y) d\tau_y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\beta \cdot f(y) d\tau_y,$$

unde $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ este bila de rază $\varepsilon > 0$ cu centrul în punctul \mathbf{x} . Folosind proprietățile soluției fundamentale $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, deducem că fiecare din potențialii (7.56) și (7.57) este funcție armonică în întreg spațiul afin \mathbb{E}^n , cu excepția punctelor aparținând suprafeței S , și tinde la zero pentru $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$.

Domeniul D și complementara acestuia în raport cu întreg spațiu \mathbb{E}^n vor fi notate prin D^+ și respectiv D^- .

Se poate demonstra că potențialul de dublu strat suferă un salt la traversarea frontierei S a domeniului D , atât dinspre D^+ cât și dinspre D^- . De exemplu, în cazul planului, relațiile de salt sunt [4][p. 79]:

$$u^+(\mathbf{x}^0) - u(\mathbf{x}^0) = -\frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}^0); \quad (7.65)$$

$$u^-(\mathbf{x}^0) - u(\mathbf{x}^0) = \frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}^0), \quad (7.66)$$

unde $u^+(\mathbf{x}^0)$ și $u^-(\mathbf{x}^0)$ sunt limitele dinspre D^+ , respectiv D^- , a potențialului de dublu strat (7.60), atunci când $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \in C$.

Cu aceste pregătiri, suntem în măsură să construim soluția $u(\mathbf{x})$ a problemei Dirichlet pentru ecuația lui Laplace în domeniul $D^+ \subset \mathbb{E}^n$ cu condiția la limită (pe frontieră)

$$u^+(\mathbf{x}^0) = g(\mathbf{x}^0), \quad (7.67)$$

sub presupunerea că *curbura curbei* C și funcția dată $g(\mathbf{x}^0)$ sunt continue. Această soluție se caută în forma potențialului de dublu strat (7.60), cu precizarea că, pentru moment, densitatea de potențial $\mu(\mathbf{y})$ este funcție necunoscută.

Se demonstrează mai întâi că formula (7.60) care exprimă potențialul de dublu strat în plan, are sens și pentru $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$. Pentru aceasta, se introduce funcția $K(s, t)$, de variabilele s și t , *abscisele curbilinii* (lungimile de arc) ale punctelor \mathbf{x}^0 și \mathbf{y} de pe curba C , prin relația

$$\pi K(s, t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \ln \|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0\|$$

și se arată că

$$\pi K(s, t) = \frac{1}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0\|^2} \sum_{i=1}^2 (y_i - x_i^0) \frac{\partial y_i}{\partial \mathbf{n}_y} = \frac{\cos \varphi}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0\|} = \frac{\partial}{\partial t} \theta(s, t), \quad (7.68)$$

unde

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{n}_y}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0\|}$$

și

$$\theta(s, t) = \arctan \frac{y_2 - x_2^0}{y_1 - x_1^0}.$$

Se poate vedea ușor [4][p. 76] că $K(s, t)$ este o funcție continuă de s și t și că

$$\lim_{t \rightarrow 0} K(s, t) = \frac{K(s)}{2\pi},$$

unde $K(s)$ este *curbura curbei* C în punctul \mathbf{x}_0 al ei.

Din continuitatea funcției $K(s)$ rezultă că expresia

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\cos \varphi}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0\|} \mu(\mathbf{y}) ds_y. \quad (7.69)$$

a potențialului de dublu strat (7.60) are sens pentru $\mathbf{x}_0 \in C$ și că $u(\mathbf{x})$ este funcție continuă pe C , în fiecare punct $\mathbf{x}_0 \in C$.

În conformitate cu (7.68), (7.69) și (7.67), pentru ca funcția $u(\mathbf{x})$ exprimată prin formula (7.60) (această funcție este armonică în domeniul D^+) să satisfacă condiția la limită (7.67), trebuie să aibă loc egalitatea

$$\mu(s) + \int_C K(s, t) \mu(t) dt = -2g(s). \quad (7.70)$$

Egalitatea (7.70) este o *ecuație integrală Fredholm liniară, de tipul al doilea*, în raport cu funcția necunoscută μ .

Prin urmare, *problema Dirichlet pentru ecuația lui Laplace se reduce la ecuația integrală (7.70)*.

În [4][p. 228] se demonstrează că *ecuația integrală (7.70) are o singură soluție μ* . Aceasta înseamnă că *potențialul de dublu strat (7.60) cu densitatea μ satisfăcând ecuația integrală (7.70) este soluția problemei Dirichlet pentru ecuația lui Laplace cu condiția pe frontieră (7.67)*.

Astfel, este lămurită **existența soluției acestei probleme**.

Se poate demonstra [4][p. 82] că atunci când punctul \mathbf{x} trece din domeniul D^+ spre domeniul D^- , iar trecerea se face printr-un punct $\mathbf{x}^0 \in C$, potențialul de simplu strat (7.58) rămâne continuu în timp ce derivata sa normală $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_x}$ suferă salturile

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_x} \right)^+ - \frac{\partial u(\mathbf{x}^0)}{\partial \mathbf{n}_{x^0}} = \frac{1}{2} \mu(\mathbf{x}^0) \quad (7.71)$$

și

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_x} \right)^- - \frac{\partial u(\mathbf{x}^0)}{\partial \mathbf{n}_{x^0}} = -\frac{1}{2} \mu(\mathbf{x}^0). \quad (7.72)$$

În formulele (7.71) și (7.72) derivatele direcționale $\frac{\partial u(\mathbf{x}^0)}{\partial \mathbf{n}_{x^0}}$ se exprimă prin formula

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}^0)}{\partial \mathbf{n}_{x^0}} = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n}_y}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0\|^2} \mu(\mathbf{y}) ds_y = \frac{1}{2} \int_C K^*(s, t) \mu(t) dt, \quad (7.73)$$

unde

$$K^*(s, t) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial s} \arctan \frac{y_2 - x_2^0}{y_1 - x_1^0} \quad (7.74)$$

este funcție continuă. *Problema Neumann* (numită de asemeni a doua problemă cu valori la limită sau a doua problemă fundamentală) a teoriei funcțiilor armonice se formulează în felul următor: să se găsească funcția $u(\mathbf{x})$, armonică în D^+ care să fie continuă împreună cu derivatele parțiale de ordinul întâi în $D^+ \cup C$ și să satisfacă condiția pe frontieră

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right)^+ = g(\mathbf{x}^0), \quad \mathbf{x}^0 \in C, \quad (7.75)$$

unde $g(\mathbf{x}^0)$ este o funcție dată definită în punctele curbei C .

Am arătat anterior că dacă $u(\mathbf{x})$ și $u_1(\mathbf{x})$ sunt două soluții ale problemei Neumann, atunci ele diferă printr-o constantă, adică $u(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) + C$.

Prin urmare, dacă $u(\mathbf{x})$ este o soluție a problemei Neumann, atunci aceeași proprietate o are și funcția $u(\mathbf{x}) + C$, unde C este o constantă reală oarecare.

Din Teorema 7.2.6, pentru ca problema Neumann cu condiția la limită (7.75) să aibă soluție este necesar ca

$$\int_C g(s) ds = 0. \quad (7.76)$$

Acum, avem toate condițiile ca să rezolvăm problema Neumann cu ajutorul potențialului de simplu strat (7.58) cu densitate necunoscută μ . Folosind (7.71), (7.73) și (7.75), pentru determinarea funcției μ obținem ecuația integrală Fredholm de tipul al doilea

$$\mu(s) + \int_C K^*(s, t) \mu(t) dt = 2g(s) \quad (7.77)$$

a cărui nucleu $K^*(s, t)$ se exprimă prin formula (7.74).

Astfel, problema Neumann se reduce la ecuația integrală cu nucleu singular (7.77).

Se poate arăta [4][p. 228] că condiția (7.76) este nu numai necesară dar și suficientă pentru ca soluția problemei Neumann să existe.

7.10 Problema Dirichlet interioară pentru cerc

Ne propunem să determinăm funcția armonică $u = u(x, y)$ în discul D cu centrul în origine și rază 1, când se dă funcția u pe frontiera C a acestuia.

Modelul matematic pentru această problemă la limită, denumită *problema lui Dirichlet interioară pentru cerc* îl constituie următoarele ecuații

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x, y) \in D, \\ u(x, y) = h(x, y), & (x, y) \in C = \partial D, \end{cases} \quad (7.78)$$

unde D este domeniul definit de inegalitatea $x^2 + y^2 < 1$ (discul de rază 1), iar C este cercul de ecuație $x^2 + y^2 = 1$, deci cu centrul în originea reperului Oxy și rază 1.

Vom reformula această problemă la limită în coordonate polare, ceea ce revine la a efectua schimbarea de variabile independente

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta. \end{cases} \quad (7.79)$$

Laplacianul funcției u , în două dimensiuni, în coordonate polare, are expresia

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \quad (7.80)$$

astfel că, utilizând (7.79) și (7.80), problema la limită (7.78) devine

$$\begin{cases} r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & (r, \theta) \in [0, 1) \times [0, 2\pi], \\ u|_C = f(\theta), & \theta \in C = [0, 2\pi], \end{cases} \quad (7.81)$$

unde s-a efectuat notația $f(\theta) = h(\cos \theta, \sin \theta)$.

În problema la limită reformulată în coordonate polare (7.81), noua funcție necunoscută a fost notată tot cu u și este de fapt rezultatul compunerii funcției u din (7.78) cu funcțiile reale de variabilele reale r și θ , definite prin relațiile (7.79). Prin urmare, în (7.81) avem că $u = u(r, \theta)$ este funcția necunoscută.

Pentru determinarea soluției problemei la limită (7.81), utilizăm *metoda separării variabilelor* și deci căutăm soluția ecuației (7.81)₁ în forma

$$u(r, \theta) = R(r) \cdot \Phi(\theta). \quad (7.82)$$

Impunând ca funcția u din (7.82) să satisfacă ecuația diferențială (7.81)₁, după separarea variabilelor, obținem ecuația

$$\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} + \frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)} = 0,$$

care este echivalentă cu

$$\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)} = k, \quad (7.83)$$

unde k este o constantă ale cărei valori urmează să fie precizate. Obținem astfel ecuațiile:

$$\begin{cases} \Phi''(\theta) + k\Phi(\theta) = 0; \\ r^2 R''(r) + r R'(r) - kR(r) = 0. \end{cases} \quad (7.84)$$

Din condiția naturală ca funcția u din (7.78) să fie continuă pe $D \cup C$ și să admită derivate parțiale de ordinul doi continue pe D , rezultă că $R(r)$ trebuie să fie *funcție mărginită* pe compactul $[0, 1]$. În afară de aceasta, fiindcă domeniul D este un disc, Φ trebuie să fie *funcție periodică* de perioadă 2π , adică $\Phi(\theta + 2\pi) = \Phi(\theta)$. Această condiție de periodicitate a funcției Φ implică o anumită formă a constantei k și nu este greu de dovedit că aceste valori sunt $k = n^2$, unde $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, ecuația (7.84)₁ are soluțiile

$$\Phi_n(\theta) = \alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.85)$$

Funcțiile (7.85) se numesc *funcții proprii* ale problemei la limită considerată, iar valorile lui k , adică $k = n^2$, unde $n \in \mathbb{N}$, se numesc *valori proprii* ale problemei.

Ecuația diferențială (7.84)₂ este de tip Euler și căutând soluții ale acesteia de forma

$$R(r) = r^\alpha,$$

constatăm că constanta reală α trebuie să fie soluția *ecuației caracteristice*

$$\alpha^2 - n^2 = 0,$$

care are desigur rădăcinile $\alpha = \pm n$. Astfel, pentru $n \neq 0$ ecuația diferențială (7.84)₂ are soluția generală

$$R_n(r) = \gamma_n r^n + \delta_n r^{-n}.$$

Pentru $n = 0$, ecuația corespunzătoare obținută din (7.84)₂ este $rR''(r) + R'(r) = 0$, care se mai poate scrie $(rR'(r))' = 0$, sau $rR'(r) = \delta_0$. Ultima ecuație are soluția $R(r) = \delta_0 \ln r + \gamma_0$. Însă, din condiția de mărginire a funcției $R(r)$, deducem că $\delta_n = 0$, pentru $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, ecuația (7.81)₁ are soluțiile

$$u_n(r, \theta) = r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

unde am notat $\alpha_n \gamma_n = A_n$ și $\beta_n \gamma_n = B_n$.

Să considerăm acum seria de funcții

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta). \quad (7.86)$$

Funcția u din (7.86) verifică ecuația (7.81)₁ deoarece fiecare termen verifică acea ecuație. Determinăm acum constantele A_0, A_n, B_n astfel încât să fie îndeplinită condiția la limită (7.81)₂. Trebuie să avem

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = f(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

În ipoteza că funcția $f(\theta)$ se poate dezvolta în serie Fourier, pentru constante se obține valorile:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau; \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \cos n\tau d\tau; \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \sin n\tau d\tau.$$

Introducem aceste valori ale constantelor în (7.86) și obținem relația

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\cos n\theta \cos n\tau + \sin n\theta \sin n\tau) \right) d\tau,$$

care se mai poate scrie în forma

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta - \tau) \right) d\tau. \quad (7.87)$$

Suma seriei de sub integrala din relația (7.87) poate fi calculată pornind de la identitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta - \tau) + i \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n(\theta - \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \exp(in(\theta - \tau)).$$

Ultima serie este convergentă pentru $r < 1$ și are suma

$$S = \frac{r \exp(i(\theta - \tau))}{1 - r \exp(i(\theta - \tau))} = \frac{r}{\exp(-i(\theta - \tau)) - r} = \frac{r(\cos(\theta - \tau) - r + i \sin(\theta - \tau))}{1 - 2r \cos(\theta - \tau) + r^2}$$

și prin urmare

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta - \tau) = \frac{r \cos(\theta - \tau) - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \tau) + r^2}. \quad (7.88)$$

Pentru a da o formă finală relației (7.87), mai trebuie calculată expresia

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta - \tau)$$

și pentru aceasta utilizăm rezultatul (7.88). Găsim

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta - \tau) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \tau) + r^2}. \quad (7.89)$$

Introducând (7.89) în (7.87), obținem soluția problemei (7.81) în forma

$$u(r, \theta) = \frac{1 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\tau) d\tau}{1 - 2r \cos(\theta - \tau) + r^2}. \quad (7.90)$$

Prin schimbarea lui r în r/R se obține soluția problemei Dirichlet pentru cercul de rază R

$$u(r, \theta) = \frac{R - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\tau) d\tau}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \tau) + r^2}. \quad (7.91)$$

Fiecare din relațiile (7.90) și (7.91) este cunoscută sub numele de *formula lui Poisson*.

Exercițiul 7.10.1. Să se determine soluția problemei Dirichlet pentru discul cu centrul în origine de rază 1 :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ u(x, y) = y, \text{ pentru } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ cu proprietatea } x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \quad (7.92)$$

Soluție. Se trece la coordonate polare în plan și se utilizează formula lui Poisson (7.90) în care $f(\tau) = \sin \tau$, deci

$$u(r, \theta) = \frac{1 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \tau}{1 - 2r \cos(\theta - \tau) + r^2} d\tau. \quad (7.93)$$

În integrala (7.93) efectuăm schimbarea de variabilă $e^{i\tau} = \exp(i\tau) = z$. Observăm întâi că dacă τ parcurge intervalul de integrare $[0, 2\pi]$, atunci z aparține cercului $|z| = 1$ având centrul în origine și raza 1. Ținând cont apoi de *formulele lui Euler*

$$\sin \tau = \frac{e^{i\tau} - e^{-i\tau}}{2i}, \quad \cos \tau = \frac{e^{i\tau} + e^{-i\tau}}{2}$$

și de substituția $e^{i\tau} = z$, găsim

$$\sin \theta = \frac{z^2 - 1}{2iz}, \quad \cos(\theta - \tau) = \frac{z^2 e^{-i\theta} + e^{i\theta}}{2z}.$$

Diferențiind în relația $e^{i\tau} = z$, obținem $ie^{i\tau} d\tau = dz$, de unde deducem $d\tau = \frac{dz}{iz}$. Folosind toate aceste rezultate în integrala (7.93) găsim că aceasta devine

$$u(r, \theta) = \frac{1 - r^2}{4\pi} \int_{|z|=1} \frac{z^2 - 1}{z \left(re^{-i\theta} z^2 - (1 + r^2)z + re^{i\theta} \right)} dz.$$

Numitorul funcției $f(z)$ de sub semnul integralei are rădăcinile $z_1 = 0$, $z_2 = re^{i\theta}$ și $z_3 = \frac{1}{r}e^{i\theta}$, însă doar z_1 și z_2 se află în interiorul cercului $|z| = 1$. Punctele z_1 și z_2 sunt *poli simpli* pentru funcția $f(z)$.

Pentru calculul acestei integrale în complex se aplică *teorema reziduurilor* [2], [15][p. 251], deci

$$u(r, \theta) = \frac{i(1 - r^2)}{2} \left(\text{Rez}[f(z), z_1] + \text{Rez}[f(z), z_2] \right),$$

unde $\text{Rez}[f(z), z_1]$ și $\text{Rez}[f(z), z_2]$ sunt *reziduurile* funcției $f(z)$ în polii z_1 și respectiv z_2 , iar

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z \left(re^{-i\theta} z^2 - (1 + r^2)z + re^{i\theta} \right)}.$$

Deoarece $f(z)$ este câțul polinoamelor

$$P(z) = z^2 - 1, \quad Q(z) = z \left(re^{-i\theta} z^2 - (1 + r^2)z + re^{i\theta} \right),$$

rezultă că reziduurile funcției $f(z)$ în polii simpli z_1 și z_2 sunt

$$\text{Rez}[f(z), z_1] = \frac{P(z_1)}{Q'(z_1)}, \quad \text{Rez}[f(z), z_2] = \frac{P(z_2)}{Q'(z_2)}.$$

Prin urmare, reziduurile corespunzătoare sunt

$$\operatorname{Rez}[f(z), z_1] = -\frac{1}{re^{i\theta}}, \quad \operatorname{Rez}[f(z), z_2] = \frac{re^{2i\theta} - 1}{r(r^2 - 1)e^{i\theta}},$$

suma lor fiind

$$\operatorname{Rez}[f(z), z_1] + \operatorname{Rez}[f(z), z_2] = \frac{r(e^{2i\theta} - 1)}{(r^2 - 1)e^{i\theta}}.$$

Aplicând teorema reziduurilor [15][p. 251], găsim

$$u(r, \theta) = -i \frac{r(e^{2i\theta} - 1)}{2e^{i\theta}} = r \sin \theta.$$

Revenind la variabilele x și y constatăm că soluția problemei la limită (7.92) este $u(x, y) = y$. ■

Exercițiul 7.10.2. Să se determine soluția $u = u(r, \theta)$ a problemei Dirichlet interioară pentru discul cu centrul în origine de rază 3, știind că pe frontiera acestuia funcția u satisface condiția $u(3, \theta) = \frac{\theta}{2}$, unde $\theta \in [0, 2\pi]$. Să se calculeze valoarea în punctul $M(1, \pi/3)$ a soluției.

Soluție. Conform rezultatelor stabilite mai sus, soluția problemei

$$\begin{cases} r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & (r, \theta) \in [0, 3) \times [0, 2\pi], \\ u(3, \theta) = \frac{\theta}{2}, & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases} \quad (7.94)$$

este de forma

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (E_n \cos n\theta + F_n \sin n\theta), \quad (7.95)$$

unde coeficienții se determină din condiția la limită (7.94)₂ :

$$u(3, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n (E_n \cos n\theta + F_n \sin n\theta) = \frac{\theta}{2}. \quad (7.96)$$

Ultima egalitate din (7.96) reprezintă dezvoltarea în serie Fourier a funcției $\frac{\theta}{2}$, de perioadă $T = 2\pi$. Prin urmare, coeficienții acestei dezvoltări trebuie să fie dați de relațiile

$$\begin{cases} E_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{2}, \\ E_n &= \frac{1}{3^n \pi} \int_0^{2\pi} \frac{\theta}{2} \cos n\theta d\theta = 0, \\ F_n &= \frac{1}{3^n \pi} \int_0^{2\pi} \frac{\theta}{2} \sin n\theta d\theta = -\frac{1}{n3^n}. \end{cases} \quad (7.97)$$

Din (7.95) și (7.97) rezultă că soluția căutată este

$$u(r, \theta) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n3^n} \sin n\theta.$$

Valoarea soluției $u(r, \theta)$ în punctul M de coordonate polare $r = 1$ și $\theta = \pi/3$ se determină simplu și găsim

$$u\left(1, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} \sin \frac{n\pi}{3}.$$

■

Exercițiul 7.10.3. Să se determine soluția $u = u(r, \theta)$ a problemei lui Dirichlet pentru discul cu centrul în origine și de rază 2, știind că pe frontiera acestuia funcția $u(r, \theta)$ satisface condiția $u(2, \theta) = 3 \sin 2\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta$, unde $\theta \in [0, 2\pi]$.

Soluție. Întrucât se cere determinarea soluției care să depindă de coordonatele polare r și θ , vom considera de la bun început că ecuația lui Laplace este scrisă în aceste coordonate. Prin urmare, în discul de rază $r = 2$, trebuie să determinăm acea soluție a ecuației

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

care să satisfacă condiția la limită $u(2, \theta) = 3 \sin 2\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta$, unde $\theta \in [0, 2\pi]$.

Se aplică metoda separării variabilelor, ceea ce înseamnă că se caută soluții de forma

$$u(r, \theta) = R(r)T(\theta)$$

care introduse în ecuația de mai sus, conduce la

$$R''T + \frac{1}{r}R'T + \frac{1}{r^2}RT'' = 0.$$

Separând variabilele în ultima ecuație, avem

$$\frac{T''}{T} = -\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = \lambda.$$

Astfel, se obțin ecuațiile diferențiale ordinare de ordinul al doilea

$$\begin{cases} T'' + \lambda T = 0, \\ r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0. \end{cases}$$

⁻¹Din faptul că funcția u este periodică în variabila θ , rezultă că și funcția $T(\theta)$ trebuie să fie periodică în θ , ceea ce înseamnă că ecuația diferențială în $T(\theta)$ trebuie să aibă soluții periodice. Rezultă:

$$\lambda = n^2; \quad T'' + n^2 T = 0; \quad r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Soluțiile periodice ale ecuației $T'' + n^2 T = 0$ sunt de forma

$$T_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta.$$

Pentru ecuația diferențială $r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0$ se caută soluții de forma $R(r) = r^t$. O astfel de funcție este soluție dacă $t^2 - r^2 = 0$, ceea ce înseamnă că $t = \pm n$ și deci

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Din condiția ca $R(r)$ să fie continuă în originea $r = 0$, deducem că $D_n = 0$.

Dacă introducem notațiile $A_n C_n = E_n$ și $B_n C_n = F_n$, atunci avem că

$$u_n(r, \theta) = r^n (E_n \cos n\theta + F_n \sin n\theta), \quad n = 1, 2, \dots$$

⁻¹Folosind principiul superpoziției [18], rezultă că soluția generală în discul de rază $r = 2$ a ecuației lui Laplace în coordonate polare este

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (E_n \cos n\theta + F_n \sin n\theta).$$

Coeficienții E_n și F_n se determină din condiția la limită, ceea ce înseamnă că

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (E_n \cos n\theta + F_n \sin n\theta) = 3 \sin 2\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi],$$

de unde deducem că singurii coeficienți nenuli sunt E_2 și F_2 și aceștia au valorile

$$E_2 = \frac{1}{8}, \quad F_2 = \frac{3}{4}.$$

Prin urmare, soluția problemei este

$$u(r, \theta) = \frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{2} \cos 2\theta + 3 \sin 2\theta \right).$$

■

Capitolul 8

Probleme și exerciții propuse

8.1 Probleme propuse

Problema 8.1.1. *Există câmpuri vectoriale care sunt simultan solenoidale și irotaționale?*

Problema 8.1.2. *Să se arate că egalitatea $\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0$ constituie o condiție necesară și suficientă pentru compatibilitatea sistemului de ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi*

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = f_1, \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = f_2, \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = f_3, \end{cases}$$

unde $f_1, f_2, f_3 \in C^1(D)$ sunt funcții date pe domeniul simplu conex $D \subset \mathbb{R}^3$.

Problema 8.1.3. *Să se afle care din câmpurile vectoriale admit un potențial (scalar sau vectorial) și să se determine acest potențial:*

- a) $\mathbf{v} = (x + 2y)\mathbf{i} + (y - 2x)\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$;
- b) $\mathbf{v} = (xy - az)\mathbf{i} + (a^2 - y^2)\mathbf{j} + (yz - ax)\mathbf{k}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$;
- c) $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\varphi(y)\mathbf{j} - 2z\varphi(y)\mathbf{k}$, $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$;
- d) $\mathbf{v} = (y - z)\mathbf{i} + (x - 1)\mathbf{j} - x\mathbf{k}$;
- e) $\mathbf{v} = r^3\mathbf{r}$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$;
- f) $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right)\mathbf{k}$;
- g) $\mathbf{v} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$.

Problema 8.1.4. *Să se determine soluția generală și soluția problemei Cauchy respective în următoarele cazuri:*

a) $y(x+2u)\frac{\partial u}{\partial x} - (x+u)^2\frac{\partial u}{\partial y} + yu = 0, \quad u(0, y) = y^2;$

b) $xu\frac{\partial u}{\partial x} + yu\frac{\partial u}{\partial y} + xy = 0, \quad u(x, 2) = x;$

c) $2xu\frac{\partial u}{\partial x} + 2yu\frac{\partial u}{\partial y} = u^2 - x^2 - y^2, \quad u(x, 1) = x;$

d) $x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = u, \quad u(1, y, z) = y + z;$

e) $xu\frac{\partial u}{\partial x} + yu\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2 + u^2, \quad u(x, 1) = x^2;$

f) $(x + e^x)\frac{\partial u}{\partial x} + (y + e^y)\frac{\partial u}{\partial y} = u^2 - e^{x+y};$

g) $xy\frac{\partial u}{\partial x} - y^2\frac{\partial u}{\partial y} = x^2, \quad u(x, x^2) = e^x.$

Problema 8.1.5. *Să se determine soluția $u = u(r, \theta)$ a problemei lui Dirichlet pentru discul cu centrul în origine și rază 3 știind că pe frontiera acestuia este satisfăcută condiția $u(3, \theta) = 6 \sin 2\theta$, unde $\theta \in [0, 2\pi]$.*

8.2 Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri

Exercițiul 8.2.1. *Să se reducă la forma canonică ecuația cu derivate parțiale de ordinul doi*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Folosind rezultatul stabilit să se determine soluția generală a ecuației.

Indicație. Ecuația este de tip hiperbolic. Se efectuează substituția $\begin{cases} \xi = y + 5x, \\ \eta = y - x. \end{cases}$ ■

Răspuns. Forma canonică a ecuației este $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$, iar soluția sa generală a este $u(x, y) = f(y + 5x) + g(y - x)$, unde f și g sunt funcții reale de variabilă reală de două ori diferențiabile. ■

Exercițiul 8.2.2. *Stabiliți tipul ecuației cu derivate parțiale de ordinul al doilea*

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

și apoi aduceți-o la forma canonică.

Indicație. Ecuația este de tip hiperbolic. Se va folosi substituția $\begin{cases} \xi = \frac{x}{y}, \\ \eta = xy. \end{cases}$ ■

Răspuns.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$
 ■

Exercițiul 8.2.3. *Specificați tipul și apoi aduceți la forma canonică ecuația cu derivate parțiale de ordinul al doilea*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3 + \cos^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Indicație. Ecuția este de tip hiperbolic. Se efectuează substituția $\begin{cases} \xi = \cos x + 2x + y, \\ \eta = \cos x - 2x + y. \end{cases}$ ■

Răspuns. $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\xi + \eta}{\xi^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0.$ ■

Exercițiul 8.2.4. *Cercetați tipul ecuației cu derivate parțiale de ordinul doi*

$$\operatorname{tg}^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y \operatorname{tg} x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \operatorname{tg}^3 x \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

și apoi găsiți expresia sa canonică.

Indicație. Ecuția este de tip parabolic. Se efectuează substituția $\begin{cases} \xi = y \sin x, \\ \eta = y. \end{cases}$ ■

Răspuns. $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{2\xi}{\eta^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$ ■

Exercițiul 8.2.5. *Să se stabilească tipul ecuației*

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

și apoi să se determine o formă canonică a sa.

Indicație. Ecuția este de tip parabolic. Se efectuează substituția $\begin{cases} \xi = x^2 + y^2, \\ \eta = x. \end{cases}$ ■

Răspuns. $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\eta}{\xi - \eta^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$ ■

Exercițiul 8.2.6. *Determinați tipul ecuației*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad y > 0$$

și apoi găsiți-i forma canonică.

Indicație. Ecuția este de tip eliptic. Se efectuează substituția $\begin{cases} \xi = 2\sqrt{y}, \\ \eta = x. \end{cases}$ ■

Răspuns. $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$ ■

Exercițiul 8.2.7. *Specificați tipul și apoi aduceți la forma canonică ecuația cu derivate parțiale de ordinul al doilea*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ cu } x > 0.$$

Indicație. Ecuația este de tip eliptic. Se efectuează substituția $\begin{cases} \xi = y, \\ \eta = \frac{2}{3}x\sqrt{x}. \end{cases}$ ■

Răspuns.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0. \quad \blacksquare$$

Exercițiul 8.2.8. *Să se aducă la forma canonică ecuația*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 20 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Indicație. Ecuația este de tip eliptic. Se va efectua substituția $\begin{cases} \xi = y - 4x, \\ \eta = 2x. \end{cases}$ ■

Răspuns.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0. \quad \blacksquare$$

Exercițiul 8.2.9. *Să se integreze ecuația cu derivate parțiale de ordinul al doilea*

$$4x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

unde $x > 0$, iar $y \neq 0$.

Indicație. Ecuația este de tip hiperbolic. Se face substituția $\begin{cases} \xi = \frac{x}{y^2}, \\ \eta = xy^2. \end{cases}$ ■

Răspuns. Soluția generală a ecuației este $u(x, y) = \sqrt[4]{xy^2} \varphi\left(\frac{x}{y^2}\right) + \psi(xy^2)$, unde φ și ψ sunt funcții reale arbitrare de două ori derivabile. ■

Exercițiul 8.2.10. *Să se determine soluția ecuației cu derivate parțiale de ordinul doi*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \sin^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

care satisface condițiile $u(x, \sin x) = x^4$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x, \sin x) = x$.

Indicație. Ecuația este de tip hiperbolic. Utilizați substituția $\begin{cases} \xi = x - y + \sin x, \\ \eta = -x - y + \sin x. \end{cases}$ ■

Răspuns. $u(x, y) = \frac{1}{2}[(x + y - \sin x)^4 + (x - y + \sin x)^4] + \frac{1}{4}[(x - y + \sin x)^2 - (x + y - \sin x)^2].$ ■

Exercițiul 8.2.11. Studiați ecuația cu derivate parțiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x} - 3\frac{\partial u}{\partial y} = e^x.$$

Indicație. Ecuația este de tip hiperbolic. Se face substituția $\begin{cases} \xi = x + y, \\ \eta = x - y \end{cases}$ ■

Răspuns. $u(x, y) = \varphi(x + y) + e^{-3y}\psi(x - y) + \frac{e^x}{4}.$ ■

Exercițiul 8.2.12. Să se integreze ecuația $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 2 \cos(3x - 2t).$

Indicație. Se caută o soluție particulară de forma $u_p(x, t) = a \cos(3x - 2t) + b \sin(3x - 2t).$ ■

Răspuns. $u_p(x, y) = \frac{4}{85} \sin(3x - 2y) - \frac{18}{85} \cos(3x - 2y).$ ■

Exercițiul 8.2.13. Să se determine soluția generală a ecuației cu derivate parțiale de ordinul al doilea

$$4x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x \frac{\partial u}{\partial x} = 2 - 3e^x.$$

Indicație. Ecuația este de tip hiperbolic și se utilizează substituția $\begin{cases} \xi = \frac{x}{y^2}, \\ \eta = xy^2. \end{cases}$ ■

Răspuns. $u(x, y) = \sqrt[4]{xy^2} \varphi\left(\frac{x}{y^2}\right) + \psi(xy^2).$ ■

Exercițiul 8.2.14. Să se afle soluția generală a ecuației $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

Indicație. Ecuația este de tip parabolic și se face substituția $\begin{cases} \xi = y, \\ \eta = y - 2x. \end{cases}$ ■

Răspuns. $u(x, y) = e^{\frac{y}{2-x}} + \varphi(y) + \psi(y - 2x).$ ■

Exercițiul 8.2.15. Să se afle soluția generală a ecuației $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 6\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} - 4u = 2e^{x-y}.$

Indicație. Ecuația este de tip parabolic. Se va efectua substituția $\begin{cases} \xi = x + 2y, \\ \eta = y. \end{cases}$ ■

Răspuns. $u(x, y) = e^y \varphi(x + 2y) + e^{-4y} \psi(x + 2y) - \frac{1}{2} e^{x-y}.$ ■

8.3 Probleme cu condiții inițiale și la limită

Exercițiul 8.3.1. Să se determine soluția ecuației $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ care satisface condițiile inițiale

$$\begin{cases} u(x, 0) = 3 \sin \frac{\pi x}{4}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{cases}$$

și condițiile la limită

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(4, t) = 0. \end{cases}$$

Indicație. Este o problemă la limită cu condiții inițiale pentru ecuația coardei vibrante finită și omogenă. ■

Răspuns. $u(x, t) = 3 \sin \frac{\pi x}{4} \cos \frac{\pi t}{2}.$ ■

Exercițiul 8.3.2. Să se găsească soluția ecuației $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ care satisface condițiile inițiale

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{2h}{l}x, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ \frac{2h}{l}(l-x), & \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$

și condițiile la limită $u(0, t) = 0, u(l, t) = 0.$

Indicație. Problemă la limită cu condiții inițiale pentru ecuația coardei vibrante finită și omogenă. ■

Răspuns. $u(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi}{l} x \cos \frac{a(2k+1)\pi}{l} t.$ ■

Exercițiul 8.3.3. Să se afle soluția ecuației $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, 0 \leq x \leq l$ știind că

$$u(x, 0) = x^2 - 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0.$$

Indicație. Problemă de propagare a căldurii într-o bară finită fără surse externe de încălzire. ■

Răspuns.

$$u(x, t) = \frac{4l^2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \left(\cos \frac{k\pi}{l} x \right) e^{-\left(\frac{ak\pi}{l} \right)^2 t}.$$
 ■

Exercițiul 8.3.4. Să se determine cea soluție a ecuației $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ care satisface condițiile inițiale $u(x, 0) = 3x^2$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0$.

Indicație. Se arată că soluția generală a ecuației este de forma

$$u(x, y) = f(x + y) + g(3x - y),$$

unde f și g sunt funcții reale de variabilă reală de două ori derivabile. Se găsesc apoi aceste funcții impunând condițiile din enunț. ■

Răspuns.

$$u(x, y) = 3x^2 + y^2.$$
 ■

Exercițiul 8.3.5. Să se determine soluția ecuației $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 7\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ cu condițiile inițiale $u(0, y) = 9y^3$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = y^2$.

Indicație. Ecuația este de tip hiperbolic. Se efectuează substituția $\begin{cases} \xi = \xi = 3x + y, \\ \eta = \eta = x + 2y \end{cases}$ ■

Răspuns.

$$u(x, y) = \frac{1}{5} [(3x + y)^2 - (3x + y)^3 + \frac{3}{4}(x + 2y)^3 - \frac{1}{4}(x + 2y)^2].$$
 ■

Exercițiul 8.3.6. Să se afle soluția ecuației $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + tx$, cu condițiile inițiale $\begin{cases} u(0, x) = x^2, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = x. \end{cases}$

Indicație. Problemă de propagare a undelor elastice într-o bară infinită sub influența unei forțe externe. ■

Exercițiul 8.3.7. Să se determine soluția ecuației $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^x$ cu condițiile inițiale

$$\begin{cases} u(0, x) = \sin x, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = x + \cos x. \end{cases}$$

Indicație. Problemă de propagare a undelor elastice sub influența unei forțe externe staționare. ■

Răspuns.

$$u(x, t) = 3 \sin x \cos t + xt - e^x + \frac{1}{2}(e^{x+t} + e^{x-t}).$$
 ■

Exercițiul 8.3.8. Să se determine soluția ecuației

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

unde $0 < x < 1$, care satisface condițiile inițiale $u(x, 0) = \arcsin x$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 1$.

Indicație. Ecuația este de tip hiperbolic. Se efectuează schimbarea $\begin{cases} \xi = \arcsin x + y, \\ \eta = \arcsin x - y \end{cases}$ ■

Răspuns. $u(x, y) = \arcsin x + y$. ■

Exercițiul 8.3.9. Să se determine soluția generală și soluția problemei Cauchy indicate în cazul ecuațiilor de mai jos:

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u(0, y) = f(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = g(y);$
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x, \quad u(0, y) = f(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = g(y).$

Indicație. Ambele ecuații sunt ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea, prima de tip hiperbolic, iar a doua de tip parabolic. ■

Răspuns. 1. Soluția generală este $u(x, y) = \varphi(y - 2x) + \psi(y + 3x)$, unde φ și ψ sunt funcții arbitrare de două ori derivabile pe \mathbb{R} , iar soluția problemei Cauchy respective este

$$u(x, y) = \frac{1}{5} \left(3f(y - 2x) + 2f(y + 3x) \right) + \frac{1}{5} \int_{y-2x}^{y+2x} g(t) dt.$$

2. $u(x, y) = \varphi(y - 2x) + x\psi(y - 2x) + e^x$ (soluția generală);

$u(x, y) = f(y - 2x) + xg(y - 2x) + 2xf'(y - 2x) + e^x - x - 1$ (soluția problemei Cauchy). ■

Index de noțiuni

- încălzire, 126
- șir ortogonal, 105
- a doua
 - identitate integrală a lui Green, 67
 - problemă fundamentală, 144
 - problemă la limită, 144
- a doua identitate a lui Green, 138
- abscise curbilinii, 151
- adsorbția poluantului, 111
- ansamblu de integrale prime, 7
- aria sferei unitate din \mathbb{E}^n , 139
- arie infinitezimală, 107
- asociatul unui sistem diferențial, 19
- banda semi-infinită, 115
- bară
 - infinită în ambele sensuri, 123
 - izolată termic, 116
- bază în nucleul operatorului liniar L , 14
- căldură propagată instantaneu, 128
- câmp
 - conservativ de forțe, 60
 - electric, 72
 - gravitațional, 60
 - magnetic, 72
 - potențial, 60
 - scalar bidimensional, 41
 - scalar tridimensional, 41
 - solenoidal, 63
 - vectorial, 47
 - vectorial diferențiabil, 62
 - vectorial biscalar, 49
 - vectorial irotational, 65
 - vectorial lamelar, 65
- câmpul vitezelor, 111
- circulația unui vector pe o curbă închisă, 55
- clasa
 - de funcții $C^1(\Omega)$, 7
 - de funcții $C^2(\mathcal{D})$, 112
- coardă
 - elastică, 85
 - elastică infinită, 88
 - infinită, 85
- coeficient de
 - difuzivitate, 110
 - dispersie, 112
- coeficient de dispersie
 - longitudinală, 112
 - transversală, 112
- coeficientul
 - conductibilității termice, 107
 - de difuzie moleculară, 111
- combinație liniară, 20
- concentrația
 - unei substanțe, 110
 - unei substanțe poluante, 111
 - unui poluant, 110, 111
- condiția
 - inițială, 13
 - lui Cauchy, 13
- condiție
 - inițială, 109
 - la limită omogenă, 148
 - la limită, 109
 - la limită neomogenă, 149
- condiții
 - esențiale, 110
 - inițiale, 81
 - inițiale ale unei coarde vibrante, 86
 - la limită, 85
 - mixte, 110
 - pe frontieră, 73
- condiții de
 - compatibilitate, 116
 - regularitate, 55
 - tip Cauchy, 110
 - tip Robin, 110
- conductibilitatea mediului, 72
- conductivitate hidraulică, 111
- constanta
 - de difuzivitate, 112
 - dielectrică a mediului, 72
- corp
 - izolat termic, 109
 - omogen, 108
- cosinusurile directe ale normalei la suprafață, 56
- curbă
 - închisă, 55, 149
 - în spațiul n dimensional \mathbb{R}^n , 6
 - caracteristică, 76
 - de nivel, 42
 - directoare a unei suprafețe cilindrice, 101
 - integrală, 6

- Jordan, 149
- netedă, 55
- orientată, 55
- simplă, 149
- curbura unei curbe plane, 150, 151
- dată inițială, 120
- date inițiale, 6
- deformare, 100
 - a unui solid, 109
 - elastică, 109
- densitate
 - de masă, 148
 - de potențial, 149
 - de volum, 148
 - materială, 85
- densitatea
 - forței de inerție, 102
 - forței externe, 102
 - maselor electrice, 72
 - unui amestec, 111
- dependență continuă de date, 114
- dependența, 6
- deplasare, 85
- derivata
 - după o direcție, 42
 - unui câmp scalar după direcția s , 43
- determinantul lui Wronski, 15
- dezordine, 109
- diametrul unei mulțimi, 61
- diferențe de permeabilitate, 110
- diferențială totală, 61
- difuzie, 108
 - a căldurii, 71
 - moleculară, 110
 - termoelastică, 109
- difuzivitate termică, 108
- dispersia unui poluant, 111
- dispersie, 110
- distribuția temperaturii, 123
- divergența unui câmp vectorial, 62
- domeniu simplu, 58
- ecuația
 - coardei vibrante, 71
 - de mișcare a unei membranei elastice, 102
 - diferențială a lui Bessel, 104
 - lui Helmholtz, 103
 - lui Laplace, 66
 - în două dimensiuni, 73
 - în trei dimensiuni, 73
 - lui Laplace în n dimensiuni, 133
 - lui Poisson
 - în două dimensiuni, 73
 - în trei dimensiuni, 73
 - lui Poisson în n dimensiuni, 133
 - neomogenă a coardei vibrante, 85
 - neomogenă a propagării undelor, 71
 - omogenă a coardei vibrante, 85
 - propagării căldurii, 108
 - propagării undelor, 72
 - propagării undelor elastice, 85
 - undelor, 71, 85
 - undelor unidimensionale, 85
- ecuația propagării
 - căldurii, 71
 - undelor cilindrice, 71
 - undelor sferice, 71, 72
- ecuație
 - caracteristică, 76, 153
 - caracteristică a unui sistem diferențial liniar și omogen, 20
 - cu derivate parțiale de ordinul întâi, 25
 - cu derivate parțiale de ordinul întâi, liniară și omogenă, 25
 - cuasiliniară neomogenă, 33
 - de echilibru, 101
 - diferențială de tip Euler, 153
 - integrală cu nucleu singular, 152
 - integrală Fredholm liniară, de tipul al doilea, 151
 - omogenă, 71
 - parabolică liniară, 112
- ecuație de tip
 - eliptic, 76
 - hiperbolic, 76
 - parabolic, 76
- ecuațiile
 - fizicii matematice, 71
 - lui Maxwell, 72
- element
 - orientat de suprafață, 57
- element de
 - arc al unei curbe, 149
 - arie, 107
 - arie în plan, 150
 - arie al sferei unitate, 138
 - arie al unei hipersuprafețe, 137
 - arie al unei hipersuprafețe netede, 134
 - volum, 137
- elongația unei coarde, 85
- emisfera unitate, 140
- entropie, 109
- existența unei soluții, 143
- expresia carteziană a derivatei unui câmp vectorial, 50
- factor
 - oscilant, 106
 - oscilator, 103
 - perturbator, 122
- familie
 - de curbe integrale, 26
- familie de curbe integrale, 26

- fenomene
 - din natură, 71
 - din societate, 71
 - electrodinamice, 72
 - electromagnetice în vid, 72
 - fizice, 71
 - staționare, 73
- fenomenul de
 - transfer de masă, 111
 - advecție, 111
 - convecție, 111
 - difuzie, 110
 - difuzie moleculară, 111
 - dispersie, 111
- filtrația
 - gazelor prin medii poroase, 71
 - lichidelor prin medii poroase, 71
- flux
 - advectiv, 111
 - de căldură, 107, 109
 - elementar, 57
- forțe elastice interne, 101
- forma
 - matriceală a unui sistem diferențial liniar, 19
 - vectorială a unui sistem diferențial liniar, 11
- forma canonică, 87
 - a unei ecu ații de tip hiperbolic, 77
 - a unei ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea, 76
 - a unei ecuații de tip eliptic, 82
 - a unei ecuații de tip parabolic, 79
- formulă de reprezentare integrală, 141
- formula
 - lui d'Alembert, 86, 88
 - lui Poisson, 155
- formula integrală
 - a divergenței, 67
 - Gauss–Ostrogradski, 59
 - a gradientului, 67
 - a lui Stokes, 67
 - a rotorului, 67
- formule
 - de calcul cu operatorul Hamilton, 65
 - de medie ale unei funcții armonice, 142
 - de reprezentare integrală, 138
 - de reprezentare prin potențiali, 150
- formulele lui Euler, 155
- frontiera unui domeniu tridimensional, 68
- funcție vectorială de variabilă reală, 12
- funcția
 - în scară, 139
 - gamma a lui Euler, 139
 - lui Green a problemei Dirichlet pentru ecuația lui Laplace, 146
 - lui Green pentru ecuația căldurii, 118
 - vectorială identic nulă, 12
- funcție
 - absolut integrabilă, 129, 137
 - armonică, 66, 134
 - armonică în punctul de la infinit, 136
 - Bessel de ordin ν și de speța întâi, 104
 - Bessel de ordin ν și de speța a doua, 104
 - de forță, 60
 - reală de două ori continuu diferențiabilă, 149
 - scalară, 41
 - sumabilă, 137
- funcții
 - de clasă C^1 , 138
 - de clasă C^2 , 138
 - de clasă $C^2(D)$, unde $D \subset \mathbb{E}^n$ este un domeniu, 139
 - de clasă $C^q([a, b])$, 12
 - necunoscute ale unui sistem diferențial, 1
 - proprii, 153
 - vectoriale, 1
- generatoarele unei suprafețe cilindrice, 101
- gradientul unui câmp scalar, 42, 44
- hipersuprafață
 - $(n - 1)$ -dimensională în \mathbb{E}^n , 139
 - netedă, 134
 - netedă $(n - 1)$ -dimensională în \mathbb{E}^n , 143
- independență funcțională, 125
- inegalitatea Cauchy–Buniakovski–Schwarz, 62
- integrală
 - curbilinee independentă de drum, 55
 - de linie, 55
 - de tip Poisson, 126
- integrală improprie
 - convergentă, 127, 138
 - depinzând de parametri absolut și uniform convergentă în raport cu unul din parametri, 127
- integrală primă
 - a unui sistem diferențial, 7
 - a unui sistem caracteristic, 26
 - a unui sistem diferențial pe o submulțime deschisă, 7
- integrala
 - curbilinee, 55
 - Gauss–Poisson, 126
 - generală a unui sistem diferențial, 7
 - Lebesgue, 137
 - Poisson, 126
- integrale
 - curbilinii de speța a doua, 55
 - improprii în sensul valorii principale Cauchy, 150
- izotrop, 107
- laplacian, 66

- laplacianul
 - în n dimensiuni, 128
 - în coordonate polare în plan, 152
 - unei funcții în n dimensiuni, 128
- lege de propagare a căldurii, 128
- legea lui Fourier, 107
- legile lui Fick, 111
- linie de câmp, 48
- lucru mecanic, 100
- lucrul
 - meccanic al unei forțe externe, 100
 - meccanic al unei forțe, 55
- mărimea vectorului de poziție, 61
- matrice
 - fundamentală a unui sistem diferențial, 14
 - jacobiană a unei funcții, 62
 - ortogonală, 135
- matricea unitate, 135
- mediu poros, 71
- membrană
 - elastică, 100
 - fixată elastic, 102
 - liberă, 101
 - supusă pe contur unei forțe, 101
- metoda
 - eliminării, 4, 22
 - lui d'Alembert, 86
 - lui Fourier, 86
 - lui Fourier de separare a variabilelor, 115
 - separării variabilelor, 86, 116, 131, 153
 - valorilor și vectorilor proprii, 6, 21
 - variației constantelor a lui Lagrange, 18, 21
- mod de răcire a unei bare, 123
- modele
 - geometrice, 111
 - geometrico-statistice, 111
 - probabilistice, 111
- mulțime nemărginită, 137
- natura unui poluant, 111
- nucleul unei ecuații integrale, 152
- numere
 - complexe, 12
 - reale, 12
- operator diferențial, 44
- operatorul
 - lui Hamilton, 44
 - lui Hamilton în n dimensiuni, 133
 - lui Laplace, 66
 - nabla, 44
- operatorul lui Laplace
 - în n dimensiuni, 133
 - în coordonate polare în plan, 103
 - în două dimensiuni, 101
- în trei dimensiuni, 72
- oscilații
 - ale curentului electric într-un conductor, 71
 - ale unei coarde, 71
 - ale unei coarde elastice, 85
 - fundamentale, 104
 - verticale, 85
- permeabilitatea magnetică, 72
- plan tangent într-un punct al unei suprafețe, 49, 56
- pol simplu, 155
- poluare, 110
- pondere, 105
- porozitate, 111
- potențial
 - al unei distribuții de masă, 148
 - de dublu strat, 149
 - de masă, 148
 - de simplu strat, 149
 - de volum, 148
 - logaritmice, 148
 - newtonian, 148
- poziția
 - de echilibru a unei coarde elastice, 85
 - inițială a unei coarde elastice, 86
 - inițială a unei membrane elastice, 102
- prima
 - identitate integrală a lui Green, 67
 - problemă la limită fundamentală, 144
- prima identitate integrală a lui Green, 138
- principiul
 - de extrem al unei funcții armonice, 142
 - de maxim, 123
 - lui Duhamel, 121
 - superpoziției, 103, 117
- problemă
 - axial-simetrică, 106
 - Cauchy, 117
 - Cauchy pentru coarda vibrantă, 86
 - corect pusă, 73
 - la limită cu condiții inițiale, 93, 95
- problemă de tip Cauchy, 73
- problema
 - Cauchy pentru ecuația propagării căldurii, 123
 - Cauchy pentru coarda vibrantă infinită, 88
 - Dirichlet, 144
 - Dirichlet interioară pentru cerc, 152
 - lui Cauchy, 32, 37
 - lui Cauchy a unui sistem diferențial, 13
 - Neumann, 144
- probleme
 - bine puse, 143
 - de tip Cauchy ale unui sistem diferențial, 17
 - de tip difuzie, 108
 - exterioare, 144
 - incorect puse, 143

- interioare, 144
- puse impropriu, 143
- procese din
 - natură, 71
 - societate, 71
- produsul scalar standard, 44
- propagarea
 - căldurii, 107
 - undelor elastice, 85, 109
- punct inițial, 6
- punctul de la infinit, 136, 137
- regim
 - de curgere, 111
 - termic de răcire al barei, 126
 - termic pe frontieră, 109
- relație
 - de compatibilitate, 40
 - de condiție, 49
- reprezentare integrală Fourier în cosinus, 125
- reziduul unei funcții complexe într-un pol, 155
- rezultanta forțelor exterioare, 85
- rotorul unui câmp vectorial, 64
- scalari, 41
- sens de parcurs al unei curbe, 55
- serie
 - absolut și uniform convergentă, 116
 - de funcții absolut și uniform convergentă, 117
 - Fourier, 154
 - Fourier de sinusuri, 116
- serii Fourier, 86
- sfera unitate, 138, 140
- singularitate
 - de tip pol, 134
 - logaritmă, 134
- sistem
 - caracteristic asociat unei ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi, 26
 - de n ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi sub formă normală, 1
 - diferențial neomogen, 11
 - diferențial omogen, 11
 - diferențial, 1
 - diferențial liniar, 19
 - diferențial liniar și omogen cu coeficienți constanți, 19
 - diferențial liniar, neomogen, 19
 - fundamental de soluții, 14
 - omogen de ecuații diferențiale de ordinul întâi cu coeficienți constanți, 19
- sistemul diferențial al liniilor de câmp, 48
- soluția generală
 - sub formă implicită a unui sistem diferențial, 7
 - a ecuației cu derivate parțiale liniare și omogenă, 28
 - a unui sistem diferențial, 17
 - sub formă explicită, 7
- soluție
 - a unui sistem de ecuații diferențiale, 12
 - elementară, 134
 - fundamentală, 134
 - generală a unui sistem diferențial, 17
 - particulară, 95
 - regulată la infinit, 136
 - stabilă, 143
- soluții liniar independente, 13
- spațiul afin \mathbb{E}^n , 67, 143
- stabilitatea unei soluții, 73
- substanță
 - creată, 110
 - distrusă, 110
- suprafață
 - de câmp, 48
 - de nivel, 42
 - integrală, 25
 - laterală izolată termic, 131
 - netedă, 56
- sursă
 - de substanță poluantă, 111
 - internă de căldură, 116, 120
- temperatură inițială, 109
- temperatura, 107
- tensiunea membranei, 100
- teoremă de
 - existență a unei soluții, 73
 - unicitate, 73
- teorema
 - funcțiilor definite implicit, 34
 - creșterilor finite, 17
 - divergenței, 67
 - lui d'Alembert, 86
 - lui Rouché, 28
 - reziduurilor, 155
- termoelasticitate, 109
- termoelasticitatea cuplată, 109
- tortuozitate, 111
- traietorie a unui sistem diferențial, 6
- transformata Fourier, 88
- transport
 - advectiv, 111
 - convectiv, 111
 - difuzional, 111
- transpusa unei matrice, 135
- undă de temperatură, 125
- unde
 - acustice, 85
 - electromagnetice, 85
 - optice, 85
- unicitatea unei soluții, 143

- valori proprii, 153
- variație medie a unui câmp scalar, 44
- variabilă
 - dependentă, 1
 - independentă, 1
- vecinătate a punctului de la infinit, 136
- vector, 11
- vectorul
 - de deplasare a lui Maxwell, 72
 - de poziție al unui punct, 61
 - densității de curent generat de forțele electrodinamice aplicate, 72
 - inducției magnetice, 72
 - propriu corespunzător unei valori proprii, 21
 - tensiune într-o coardă elastică, 85
 - unitar al normalei exterioare, 136
- versorul normalei într-un punct al unei suprafețe, 56
- vibrații
 - ale unei membrane, 71
 - ale unui gaz, 71
- viteza
 - inițială a unei coarde elastice, 86
 - luminii, 72
- viteze inițiale, 102
- wronskianul
 - soluțiilor unui sistem de ecuații diferențiale, 20
 - unui sistem fundamental de soluții, 15

Bibliografie

- [1] Adams, R. A. – *Calculus. A complete Course*, Fourth ed., Addison–Wesley, 1999
- [2] Barbu, Gh. – *Matematici speciale. Note de curs*, Tipografia Universității din Pitești, 1992.
- [3] Bermant, A. F., Aramanovich, I. G. – *Mathematical Analysis, A Brief Course for Engineering Students*, Mir Publishers, Moscow, 1986.
- [4] Bitsadze, A. V. – *Equations of Mathematical Physics*, Mir Publishers, Moscow, 1980.
- [5] Borislav, C. și alții – *Matematici speciale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [6] Brânzănescu, V., Stănășilă, O. – *Matematici speciale. Teorie, exemple, aplicații*, Editura ALL, București, 1994.
- [7] Bucur, Gh., Câmpu, E., Găină, S. – *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral Vol. III*, Editura Tehnică, București, 1967.
- [8] Budak, B., M., Fomin, S., V. – *Multiple integrals, field theory and series. An advanced course in Higher Mathematics*, Mir Publishers, Moscow, 1973.
- [9] Chiorescu, Gh. – *Matematici speciale. Culegere de aplicații în mecanică*, Editura "Gh. Asachi" Iași, 1995.
- [10] Ciobanu, Gh., Chiorescu, Gh., Sava V. – *Capitole de matematici speciale*, Rotaprint, Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iași, Facultatea de Electronică și Telecomunicații, Catedra de Matematică, 1998.
- [11] Crstici, B. (coordonator) – *Matematici speciale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [12] Craiu, M., Roșculeț, M., N. – *Ecuatii diferențiale aplicative. Probleme de ecuații cu derivate parțiale de ordinul I*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1971.
- [13] Crăciun, I. – *Analiză matematică. Calcul diferențial*, www.mec.tuiasi.ro/studenti.html/download, Iași 2011.
- [14] Crăciun, I. – *Analiză matematică. Calcul integral*, Editura PIM, Iași, 2007.
- [15] Crăciun, I. – *Capitole de matematici speciale*, Editura PIM, Iași, 2007.
- [16] Courant, R., and Hilbert, D., *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1 and 2, New York: Wiley, 1953.
- [17] Enescu, I., Sava, V. – *Matematici speciale*, Institutul Politehnic Iași, Facultatea de Mecanică, Rotaprint, 1981.
- [18] Farlow, S. J. – *Partial differential equations for scientists and engineers*, Dover Publications, Inc, New York, 1993
- [19] Găină, S., Câmpu, E., Bucur, Gh. – *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral Vol. II*, Editura Tehnică, București, 1966
- [20] Haberman, R. – *Elementary Applied Partial Differential Equations, with Fourier Series and Boundary Value Problems*, Second Edition, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1987.
- [21] Jahnke, E. and Emde, F. – *Tables of Functions with Formulae and Curves*. Stechert, 1941; Dover, 1945.

- [22] Haimovici, A. – *Ecuațiile fizicii matematice și elemente de calcul variațional*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1966.
- [23] Keks, W. – *Complemente de matematici cu aplicații în tehnică*, Editura Tehnică, București, 1981.
- [24] King, A. C., Billingham, J., and Otto, S. R. – *Differential Equations. Linear, Nonlinear, Ordinary, Partial*, Cambridge University Press, 2003.
- [25] Mattheij, R.M. M., Rienstra, S. W., ten Thije Boonkamp, J. H. M. – *Partial Differential Equations: Modeling, Analysis, Computation*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2005.
- [26] Nicolescu, L., J., Stoka, M., I. – *Matematici pentru ingineri*. Vol. I, Editura Tehnică, București, 1969.
- [27] Olariu, V., Prepeliță, V. – *Matematici speciale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1985.
- [28] Olariu, V., Stănășilă, T. – *Ecuații diferențiale și cu derivate parțiale*, Editura Tehnică, București, 1982.
- [29] Radu, C., Drăgușin, C., Drăgușin, L. – *Aplicații de algebră, geometrie și matematici speciale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1991.
- [30] Radomir, I., Ovesea, H. – *Matematici speciale*, Editura Albastră, Cluj Napoca, 2001.
- [31] Rudner, V., Nicolescu, C. – *Probleme de matematici speciale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
- [32] Smirnov, V. – *Cours de mathématiques supérieures, tome II*, Éditions Mir – Moscou, 1972.
- [33] Smirnov, V. – *Cours de mathématiques supérieures, tome III, Deuxième partie*, Éditions Mir, Moscou, 1972.
- [34] Stănășilă, T. – *Analiza complexă și calcul operațional*, Editura Universității Politehnica din București, 1985.
- [35] Șabac, I. Gh. – *Matematici speciale*, Vol. I, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [36] Șabac, I. Gh. – *Matematici speciale*, Vol. II, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1965.
- [37] Șabac, I. Gh., Cocârlan, P., Stănășilă, O., Topală, A. – *Matematici speciale*, Vol. II, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.
- [38] Teodorescu, N., Olariu, V. – *Ecuațiile fizicii matematice*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1970.
- [39] Teodorescu, N., Olariu, V. – *Ecuații diferențiale și cu derivate parțiale*, Volumul II *Ecuații cu derivate parțiale*, Editura Tehnică, București, 1979.
- [40] Thomas, Jr., G. B., Finney, R. L. – *Calculus and Analytic Geometry*, 7th Edition, Addison–Wesley Publishing Company, 1988.
- [41] Trandafir, R. – *Probleme de matematică pentru ingineri*, Editura Tehnică, București, 1977.